Eine neue Methode zur Messung von Elliptizitäten des Lichts mit Hilfe der Lummer'schen Doppelringe.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

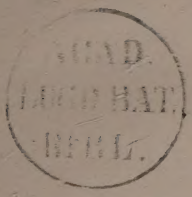
hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Kurt Sorge.



Sonnabend, den 18. September 1909, Vormittag 11 Uhr,
im Musiksaal der Universität:

Vortrag: Die Interferenzspectroscopie

und

Promotion.

Breslau 1909.

Druck von Graß, Barth & Comp. (W. Friedrich).

Meinen Eltern.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 7

§ 1. Vorgeschichte. Die beiden Ausgangsprobleme 8

§ 2. Die Helligkeitsschwankung im Doppelstreifensystem als Funktion von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen 21

§ 3. Der „Verdopplungssprung" in Abhängigkeit von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen 39

§ 4. Die Wanderung des „Verdopplungsstreifens" 48

§ 5. Theorie der neuen Methode 56

§ 6. Anwendungen der Methode 64

Zusammenfassung der Resultate 70

Einleitung.

Läßt man homogenes Licht auf eine planparallele Platte von beliebiger Dicke auffallen und betrachtet das reflektierte und hindurchgelassene Phänomen durch ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr, so erblickt man ein System konzentrischer, abwechselnd heller und dunkler Interferenzringe. Es sind die „Haidinger-Lummer'schen Ringe", so genannt nach W. Haidinger[1]), der sie zuerst beobachtete und nach O. Lummer[2]), der zum ersten Male die prinzipielle Bedeutung dieser Interferenzen erkannte. Der letztere unterschied sie als „Kurven gleicher Neigung" im Hinblick auf ihre Entstehung von den „Interferenzkurven gleicher Dicke" an dünnen keilförmigen Lamellen.

Die Kurven gleicher Neigung wurden zuerst von O. Lummer im polarisierten Lichte untersucht, d. h. mit Einschaltung eines Polarisators vor und eines Analysators hinter der planparallelen Platte. Er beobachtete bei gewissen Stellungen der Nicols eine eigentümliche Verdoppelung des Ring- oder Streifensystems. Diese „Doppelringe" wurden zuerst in der Arbeit „die Interferenzkurven gleicher Neigung im polarisierten Lichte"[3]) ausführlich behandelt und erklärt. H. Schulz[4])

---

[1]) W. Haidinger, Pogg. Ann. 77, p. 219. 1849.

[2]) O. Lummer, Inaug.-Diss. Berlin 1884 und Wied. Ann. 23, p. 49. 1884.

[3]) O. Lummer: Ann. d. Phys. 23, p. 49. 1907.

[4]) H. Schulz, Inaug.-Diss. Breslau 1908 u. Ann. d. Phys. IV. Bd. 26, p. 139. 1908.

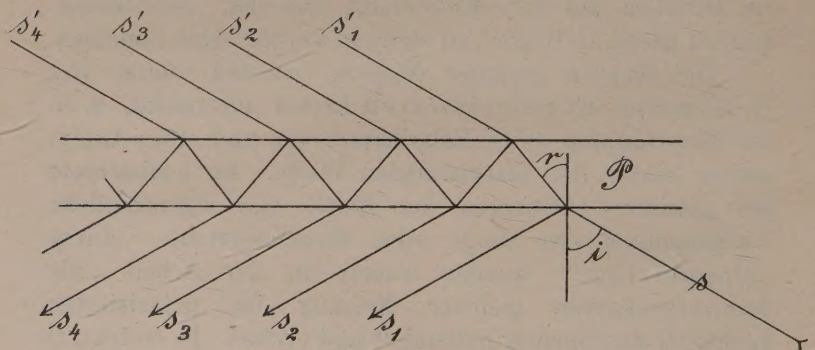
benützte sie zur Untersuchung isotroper und anisotroper Medien im reflektierten Lichte.

Auch die vorliegende Arbeit, in welcher eine neue empfindliche Methode zur Erkennung und Bestimmung von Elliptizitäten des Lichts entwickelt werden soll, hat die Doppelringe zum Gegenstand. Sie ist unmittelbar im Anschluß an die Schulz'sche Abhandlung entstanden und aus den Schulz'schen Untersuchungen herausgewachsen. Dieser Umstand macht ein genaueres Eingehen auf seine Resultate notwendig. Vorausgeschickt seien einige Betrachtungen über den Zusammenhang des einfachen und des „verdoppelten" Phänomens.

§ 1.

Vorgeschichte. Die beiden Ausgangsprobleme.

Die „Kurven gleicher Neigung" kommen dadurch zustande, daß jeder homogene Lichtstrahl s, welcher die planparallele Platte P (Fig. 1) trifft, in die einzelreflektierten parallelen Strahlen s_1, s_2, s_3 etc. und die hindurch



Figur 1.

gelassenen s'_1, s'_2, s'_3 etc. gespalten wird. Vereinigt man mit einem auf unendlich eingestellten Fernrohr einen der beiden Strahlenkomplexe in der Brennebene, so gelangen die Einzelstrahlen zur Interferenz. Die Intensität J im

Vereinigungspunkte hängt ab von der Intensität des auffallenden Strahles s, vom Intensitätsverhältnis der Einzelstrahlen, (d. h. vom Fresnelschen Reflexionsfaktor σ^2 an der Platte, welcher außen und innen denselben Wert besitzt), vom Gangunterschiede β zweier aufeinander folgender Strahlen und von der Zahl der Einzelstrahlen.

Der mathematische Ausdruck für diese Intensität im Vereinigungspunkte gestaltet sich am einfachsten, wenn man annimmt, daß unendlich viele Einzelstrahlen zur Ausbildung kommen. Er ist für diesen Fall schon von Airy[1]) abgeleitet worden und lautet:

1a.) $$J_r = \frac{4\,\sigma^2 \sin^2 \beta/2}{(1-\sigma^2)^2 + 4\,\sigma^2 \sin^2 \beta/2}$$

für das reflektierte Licht und:

1b.) $$J_d = \frac{(1-\sigma^2)^2}{(1-\sigma^2)^2 + 4\,\sigma^2 \sin^2 \beta/2}$$

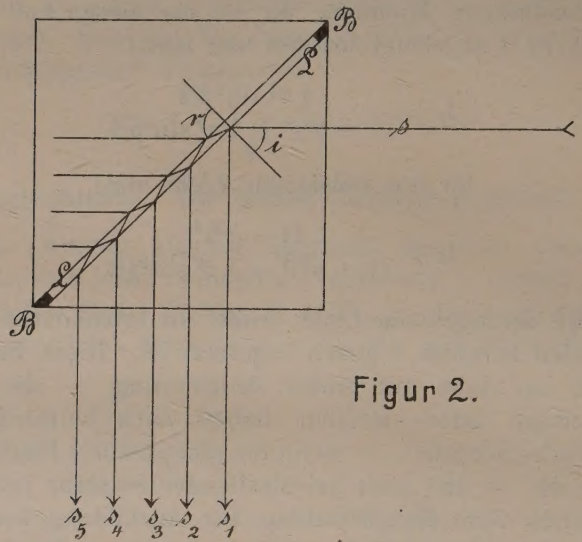
für das durchgehende Licht, wobei die Intensität des einfallenden Strahles s gleich 1 gesetzt ist. Diese Formeln gelten nur dann mit großer Annäherung, — die Interferenzringe oder -streifen haben nach Lummer die „Airy'sche Schärfe", — wenn die planparallele Platte sehr dünn ist, so daß auch bei streifender Inzidenz praktisch unendlich viele Einzelstrahlen zur Ausbildung kommen. Eine solche dünne Platte stellt man sich am besten her in Gestalt einer planparallelen Luftschicht zwischen den Hypotenusenflächen zweier rechtwinkliger Glasprismen (vergl. Fig. 2). Diese Anordnung hat den Vorzug, daß sie in der Gegend des Grenzwinkels der Totalreflexion, wo σ^2 gegen eins konvergiert, die schärfstmöglichen Interferenzen liefert; die Kurven gleicher Neigung verlaufen im reflektierten Lichte als haarscharfe Minima auf hellem Grunde, im durchgehenden Lichte als haarscharfe

---

[1]) G. B. Airy, Phil. Mag. (3) Vol. II. p. 20, 1833. Airy wendet seine Theorie allerdings mit Unrecht auf die Kurven gleicher Dicke an.

Maxima auf dunklem Grunde parallel zur Grenze der Totalreflexion und sind unter dem Namen der „Herschelschen Streifen“ bekannt[1]).

Fällt linear polarisiertes Licht auf eine planparallele Platte, so kann man sich die auffallende Schwingung in zwei senkrecht bezw. parallel zur Einfallsebene liegende Komponenten zerlegt denken, die bei der Reflexion und Brechung in verschiedenem Maße ge-



Figur 2.

schwächt werden. Da die Einzelstrahlen jedes Komplexes eine verschiedene Zahl von Reflexionen und Brechungen an der Platte erleiden, so schwingen sie nach dem Austritt aus der Platte in verschiedenen Ebenen. Schaltet man noch einen Analysator in den Strahlengang zwischen Platte und Beobachtungsfernrohr, so kann man nach Belieben den einen oder anderen von ihnen, aber immer auch nur einen einzigen vollkommen aus-

[1]) Über die Herschel'schen Streifen, ihre Zugehörigkeit zu den Kurven gleicher Neigung und ihre besonderen Eigenschaften vergl. O. Lummer, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. III. No. 11, p. 131, 1901.

löschen. Dadurch erreicht man etwas ähnliches, als wenn man einen der Einzelstrahlen direkt durch eine vorgesetzte Blende abblendet, nur daß im ersten Falle alle anderen Strahlen mit und zwar verschieden beeinflußt werden, im zweiten überhaupt nicht.

Bei direkter Abblendung des ersten reflektierten Strahles s_1 (Fig. 2) — für alle folgenden Erörterungen kommt nur das reflektierte Licht in Betracht — zeigte zuerst O. Lummer[1]), daß sich die Erscheinung in die komplementäre verwandelt. Statt der dunklen Streifen auf hellem Grunde treten helle Streifen auf dunklem Grunde auf wie im durchgehenden Lichte. Auch bei Auslöschung durch den Analysator im polarisierten Lichte erhielt er eine Komplementärerscheinung aber mit verdoppelten Streifen, das Phänomen der Doppelringe. Dasselbe ist am deutlichsten zu beobachten, wenn man sich wieder der auf p. 9 beschriebenen Anordnung zur Erzeugung der Interferenzen, also der „Herschel'schen Streifen", bedient.

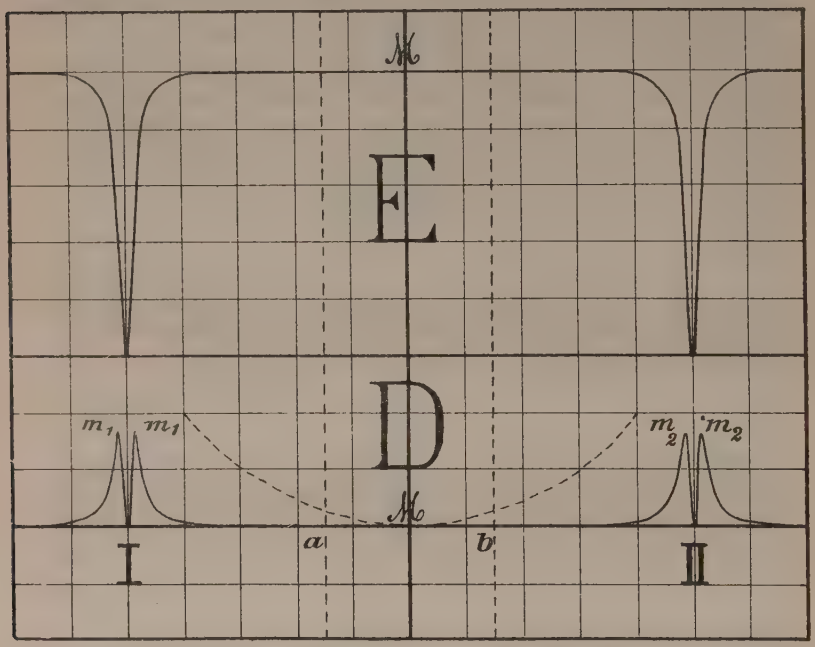
Fig. 3 a. f. S. gibt eine graphische Darstellung des einfachen (E) und des verdoppelten Streifensystems (D) im Verlaufe zwischen zwei Herschel'schen Streifen I und II dicht bei der Grenze der Totalreflexion. Die Zahlenwerte für die Kurven sind der Eingangs zitierten Arbeit von O. Lummer über die Doppelringe entnommen. Auf der Abszisse sind die Gangunterschiede β, auf der Ordinate die zugehörigen Intensitäten aufgetragen. Der Einfachheit halber ist wie dort σ^2 als konstant zwischen den beiden Streifen angesehen, u. z. dem Werte des Brechungswinkels r (Fig. 2) $= 89^0\ 30'$ entsprechend; die Intensitäten bei D sind im 8fachen Maßstabe aufgetragen als bei E[2]).

Bei E befinden sich Polarisator und Analysator in paralleler, bei D in gekreuzter Stellung; Polarisator und

[1]) O. Lummer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 3. Mai 1900 p. 504—513.

[2]) Die gestrichelte Kurve der Fig. 3 stellt die Gegend um M in 25facher Vergrößerung dar.

Analysator sind in beiden Fällen um 45° gegen die Einfallsebene geneigt. Berücksichtigt man, daß in unmittelbarer Nähe des Grenzwinkels der Totalreflexion der Polarisationszustand des reflektierten Lichts so gut wie gar nicht geändert wird, so erkennt man, daß der Strahl s_1 im ersten Falle (E) den Analysator ungehindert passiert, im zweiten (D) aber ausgelöscht wird.



Figur 3.

Auf den ersten Blick macht der Typus D wie erwähnt den Eindruck der Komplementärerscheinung mit verdoppelten Maximis m m. Näher betrachtet unterscheidet er sich von E nur durch die Anwesenheit eines breiten Zwischenminimums, dessen tiefster Punkt bei *M* liegt, während die Hauptminima I und II an Ort und Stelle geblieben sind. Das Zwischenminimum soll künftig als „Verdopplungsstreifen" bezeichnet werden. Dreht man den Analysator bei feststehendem Polarisator aus

der parallelen in die gekreuzte Stellung und wieder zurück, im ganzen um 180°, so geht der Typus E stetig in D über und umgekehrt und zwar in folgender Weise: Die Intensität sinkt zuerst an allen Punkten zwischen I und II ungefähr gleichmäßig herab; bei einer bestimmten Analysatorstellung erscheint der Verdopplungsstreifen, zuerst ganz blaß, dann deutlicher ausgeprägt, wird bei gekreuzter Stellung der Nicols D (Fig. 3), absolut dunkel und verblaßt wieder, noch ehe die halbe Drehung vollendet ist.

Zu jeder Stellung des Polarisators gehört ein ganz bestimmtes Winkelgebiet des Analysators, in welchem Verdopplung herrscht, d. h. der Verdopplungsstreifen auftritt, das „Verdopplungsgebiet“. In dieses Gebiet hinein fällt der Typus D der „maximalen Verdopplung“. Die Grenzen des Gebietes, an welchen der Verdopplungsstreifen erscheint und verschwindet, sind dadurch ausgezeichnet, daß die Stelle M der Intensitätskurve aus Konvexität in Konkavität übergeht bezw. umgekehrt. Erfahrungsgemäß vollzieht sich dieser Übergang an der einen, der maximalen Verdoppelung näher liegenden Grenze viel rascher als an der anderen; es findet ein „Verdopplungssprung“ an jener Stelle statt. — Die letzten 3 Definitionen rühren von H. Schulz her. — Das Verdopplungsgebiet ist am größten, wenn die Schwingungsebene des Polarisators einen Winkel von 45° mit der Einfallsebene bildet; es schrumpft zu Null zusammen, wenn die Polarisatorebene mit einer der beiden Hauptebenen zusammenfällt.

Theoretisch kann man die beschriebenen Erscheinungen herleiten, wenn man die Airy'schen Formeln in geeigneter Weise erweitert. Es muß die Neigung α der Schwingungsebene des Polarisators, die Neigung δ der Schwingungsebene des Analysators gegen die Einfallsebene und, entsprechend der verschiedenartigen Schwächung der parallel und senkrecht polarisierten Komponenten bei der Reflexion, ein $\sigma_{\perp}$ und $\sigma_{\parallel}$ in die Rechnung eingeführt werden. So erhält man den in der

Lummer'schen Arbeit über die „Interferenzkurven gleicher Neigung im polarisierten Lichte“ berechneten Ausdruck für die Intensitätsverteilung:

$$2.) \quad J_r = \mathfrak{M}_\perp{}^2 (A_\perp{}^2 + B_\perp{}^2) + \mathfrak{M}_\parallel{}^2 (A_\parallel{}^2 + B_\parallel{}^2) + 2\, \mathfrak{M}_\perp\, \mathfrak{M}_\parallel (A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel),$$

$$\text{wo: } A_\perp = \frac{2\,\sigma_\perp\,(1+\sigma_\perp{}^2)\,\sin^2\beta/2}{(1-\sigma_\perp{}^2)^2 + 4\,\sigma_\perp{}^2\,\sin^2\beta/2}$$

$$A_\parallel = \frac{2\,\sigma_\parallel\,(1+\sigma_\parallel{}^2)\,\sin^2\beta/2}{(1-\sigma_\parallel{}^2)^2 + 4\,\sigma_\parallel{}^2\,\sin^2\beta/2}$$

$$B_\perp = \frac{\sigma_\perp\,(1-\sigma_\perp{}^2)\,\sin\beta}{(1-\sigma_\perp{}^2)^2 + 4\,\sigma_\perp{}^2\,\sin^2\beta/2}$$

$$B_\parallel = \frac{\sigma_\parallel\,(1-\sigma_\parallel{}^2)\,\sin\beta}{(1-\sigma_\parallel{}^2)^2 + 4\,\sigma_\parallel{}^2\,\sin^2\beta/2}$$

$$\mathfrak{M}_\perp = \cos\alpha\,\cos\delta$$

$$\mathfrak{M}_\parallel = \sin\alpha\,\sin\delta \text{ ist.}$$

Derselbe hat wie der einfache Ausdruck 1 a) für das unpolarisierte Licht die permanenten Nullstellen: $\beta = 2\pi$, 4π, 6π etc., $(\sin^2\beta/2 = 0)$, welche den Herschel'schen Streifen I, II, III etc., entsprechen[1]) und stets unabhängig von $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, α und δ vorhanden sind. Dazwischen wird der Ausdruck 2) aber auch bei $\beta = \pi, 3\pi, 5\pi$ etc. $(\sin^2\beta/2 = 1)$ gleich 0 unter der speziellen Bedingung, daß:

$$2\text{a.}) \qquad \operatorname{tg}\delta = -\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{A_\perp}{A_\parallel}$$

ist, also nur bei einer ganz bestimmten Analysatorstellung. Diese Zwischenminima repräsentieren den Verdopplungsstreifen bei maximaler Verdopplung, das δ in 2a) die zugehörige Analysatorstellung.

Ist der Winkel α gleich 0^0 oder 90^0, so nimmt der Ausdruck 2) die Gestalt des einfachen Ausdrucks 1 a) an und wird:

---

[1]) An der Grenze der Totalreflexion selbst, wo β gegen 0 konvergiert, geht die Helligkeit ganz allmählich, ohne ein Minimum zu durchlaufen, aus dem gewöhnlich reflektierten ins total reflektierte Gebiet über.

$$\frac{4\,\mathfrak{M}_{\perp}^{2}\,\sigma_{\perp}^{2}\sin^{2}\beta/2}{(1-\sigma_{\perp}^{2})^{2}+4\,\sigma_{\perp}^{2}\sin^{2}\beta/2}\quad\text{bezw.}\quad\frac{4\,\mathfrak{M}_{\parallel}^{2}\,\sigma_{\parallel}^{2}\sin^{2}\beta/2}{(1-\sigma_{\parallel}^{2})^{2}+4\,\sigma_{\parallel}^{2}\sin^{2}\beta/2}$$

In diesem Falle kommt nur noch eine der beiden Hauptkomponenten jedes Strahles für die Erscheinung in Betracht und das Verdopplungsgebiet samt den Verdopplungsgrenzen und der maximalen Verdopplung reduziert sich auf die einzige Analysatorstellung $\delta = 90^0$ bezw. $\delta = 0^0$, bei welcher das ganze Phänomen gleichmäßig ausgelöscht wird (vergl. p. 13).

Auf Veranlassung von Prof. Lummer unternahm es H. Schulz, die beschriebene Erscheinung zur Untersuchung isotroper und anisotroper Medien im reflektierten Lichte verwendbar zu machen,

Schulz (l. c.) ließ die Strahlen s_1, s_2, s_3 etc. (Fig. 2 p. 10), bevor sie den Analysator passierten, an der zu untersuchenden isotropen oder anisotropen Fläche Fl. reflektieren. Dadurch entsteht ein indirektes reflektiertes Phänomen, welches sich von dem direkten bisher besprochenen im allgemeinen unterscheidet.

Bei der Reflexion an der Fläche Fl. erfahren die Strahlen s_1, s_2, s_3 etc., bezw. ihre parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Komponeten, die „Hauptkomponeten", wiederum gewisse, von der Art des reflektierenden Mediums und der Größe des Einfallswinkels φ an der Fläche abhängige Amplitudenänderungen; es findet eine Drehung der Polarisationsebenen der einzelnen Strahlen statt. Unter Umständen tritt aber auch eine Phasendifferenz Δ [1]) zwischen den Hauptkomponenten jedes einzelnen Strahles hinzu, so daß das reflektierte Licht elliptisch polarisiert wird.

Am einfachsten lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn die reflektierende Fläche isotrop ist und wenn die Einfallsebene mit der Ebene der Strahlen s_1, s_2, s_3 etc., welche von jetzt ab kurz als „Hauptebene" bezeichnet werden soll, zusammenfällt. Dann multiplizieren sich

1) Zum Unterschied von dem Gangunterschied β der Einzelstrahlen soll Δ stets als Phasendifferenz bezeichnet werden.

alle parallel polarisierten Komponenten bei der Reflexion mit demselben Schwächungsfaktor $\rho_{\shortparallel}$, die senkrecht polarisierten mit dem Faktor $\rho_{\perp}$ und die Phasendifferenz $\triangle$ zwischen den Hauptkomponenten ist bei allen Strahlen die gleiche. Unter Berücksichtigung der Größen $\rho_{\perp}$, $\rho_{\shortparallel}$ und $\triangle$ leitete H. Schulz in diesem speziellen Falle für die Intensitätsverteilung im indirekten Phänomen den Ausdruck ab:

3.) $J_r = M_{\perp}^2 (A_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) + M_{\shortparallel}^2 (A_{\shortparallel}^2 + B_{\shortparallel}^2) + 2 M_{\perp} M_{\shortparallel}$
$[\cos \triangle (A_{\perp} A_{\shortparallel} + B_{\perp} B_{\shortparallel}) + \sin \triangle (A_{\perp} B_{\shortparallel} - B_{\perp} A_{\shortparallel})]$, wo:
$M_{\perp} = \rho_{\perp} \cos \alpha \cos \delta$, $M_{\shortparallel} = \rho_{\shortparallel} \sin \alpha \sin \delta$

ist; alle anderen Größen haben dieselbe Bedeutung wie in 2.). Permanente Nullstellen sind wieder: $\beta = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ usf. D. h. die Lage der Hauptstreifen (Herschel'schen Streifen) untereinander und zur Grenze der Totalreflexion bleibt dieselbe wie beim direkten Phänomen. Dagegen hat man, was die Intensitätsverteilung zwischen den Hauptstreifen betrifft, also die Ausbildung des Doppelstreifensystems, den Eintritt der Verdopplung und die maximale Verdopplung, von vornherein folgende zwei Hauptfälle zu unterscheiden.

A.) Erster Fall: $\triangle = 0$ ($\pm \pi, \pm 2\pi$ etc.)

Das von der Fläche Fl. reflektierte Licht ist linear polarisiert (z. B. bei nahezu senkrechter oder nahezu streifender Reflexion an einer Glasfläche außerhalb des Brewsterschen Gebiets). Ausdruck 3.) reduziert sich auf:

3a.) $J_r = M_{\perp}^2 (A_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) + M_{\shortparallel}^2 (A_{\shortparallel}^2 + B_{\shortparallel}^2) \pm 2 M_{\perp} M_{\shortparallel}$
$(A_{\perp} A_{\shortparallel} + B_{\perp} B_{\shortparallel})$,

nimmt also die Form von 2.) an. Demgemäß vollzieht sich der Wechsel der Erscheinung beim Drehen des Analysators in ganz ähnlicher Weise wie beim direkten Phänomen. Es ändert sich nur die zum Verdopplungssprung und zur max. Verdopplung gehörige Einstellung des Analysators auf Grund der in $M_{\perp}$ und $M_{\shortparallel}$ enthaltenen Größen $\rho_{\perp}$ bezw. $\rho_{\shortparallel}$. Umgekehrt konnte Schulz aus dieser

„Wanderung“ des Verdopplungssprunges und der max. Verdopplung Schlüsse ziehen auf die bei der Reflexion stattfindenden Amplitudenänderungen, auf $\rho_\perp$ und $\rho_\parallel$ bezw. das Verhältnis $\rho_\perp/\rho_\parallel$.

Praktisch benützte er nur den Verdopplungssprung, welcher eine genauere Einstellung zuließ, als die max. Verdopplung.

Bei isotropen Flächen hängt $\rho_\perp/\rho_\parallel$ nur vom Einfallswinkel φ ab. Variiert man den Einfallswinkel, so ändert sich auch δ_{sp}, die Einstellung des Analysators auf Verdopplungssprung. δ_{sp} und $\rho_\perp/\rho_\parallel$ stehen durch die von Schulz aus 3a.) abgeleitete Formel:

4.) $$\operatorname{tg}\delta_{sp} = C \cdot \rho_\perp/\rho_\parallel \operatorname{ctg}\alpha$$

miteinander in Beziehung (C ist eine Funktion von $\sigma_\perp$ und $\sigma_\parallel$). Die Formel 4.) gestattet, $\rho_\perp/\rho_\parallel$ aus dem beobachteten δ_{sp} zu berechnen, vorausgesetzt, daß man α, $\sigma_\perp$ und $\sigma_\parallel$ konstant läßt, d. h. den Polarisator festhält und immer zwischen zwei bestimmten Hauptstreifen, etwa zwischen I und II beobachtet. Bei doppeltbrechenden Medien hängt $\rho_\perp/\rho_\parallel$ auch von der Lage der Krystallachse, bezw. der Binormalen zur Einfallsebene ab. Daher ändert sich δ_{sp} im allgemeinen schon, wenn man die Fläche Fl. in sich selbst dreht, während man den Einfallswinkel φ konstant läßt. Stellt man zuerst auf Verdopplungssprung ein und dreht dann die Fläche in sich selbst, so spielt die Erscheinung von der Grenze der Verdopplung bald in die ersten Stadien der Verdopplung, bald in das einfache Phänomen hinüber. Auf diese Weise gelang es Schulz noch geringe Spuren von Doppelbrechung eines Mediums im reflektierten Lichte sichtbar zu machen.

B.) Zweiter Fall: $\Delta \neq 0$ ($\pm\pi$, $\pm 2\pi$ etc.).

Das von der Fläche Fl. reflektierte Licht ist elliptisch polarisiert (z. B. bei durchsichtigen Medien in der Gegend des Brewster'schen Winkels, bei Metallreflexion und im Gebiete der Totalreflexion). Die Intensitätsverteilung (für isotrope Medien) wird durch den allgemeinen Ausdruck

3.) (p. 16) dargestellt, welcher eine andere Gestalt besitzt als der Ausdruck 2.) (p. 14) für das direkte Phänomen; daher sind die p. 13 festgesetzten Definitionen nicht ohne weiteres zu übertragen wie im ersten Falle.

In der Tat konstatierte auf experimentellem Wege und durch zahlenmäßige Berechnung bereits Schulz bezüglich der maximalen Verdopplung den folgenden Unterschied: Dreht man den Analysator bei feststehendem Polarisator im ganzen um 180° und faßt nur die Stelle $\sin^2\beta/2=1$ (*M* Fig. 3) zwischen zwei Hauptstreifen ins Auge, z. B. die Stelle $\beta = 3\pi$ zwischen I und II, so erhält man, wenn $\Delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ etc. ist, einmal absolute Dunkelheit (maximale Verdopplung D Fig. 3) und einmal maximale Helligkeit (E Fig. 3). Ist: $\Delta \neq 0, \pm\pi$ etc., so erfährt das Minimum eine Aufhellung; gleichzeitig wird das Maximum dunkler; die Intensitätsschwankung $J_{max}-J_{min}$ wird also kleiner, und zwar fand Schulz, daß sie bis zu 0 abnimmt, wenn Δ von 0 bis $\pi/2$ wächst, vorausgesetzt, daß der Polarisatorwinkel $\alpha = 45^0$ ist. Sobald daher Δ von $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc. verschieden ist, gibt es keine maximale Verdopplung mehr im obigen Sinne (p. 13), sondern nur eine Einstellung auf größte Dunkelheit δ_{min}, welcher eine Einstellung auf größte Helligkeit δ_{max} entspricht. Diese Einstellungen berechnete Schulz aus 3.) zu:

5.)

$$\text{a.)}\ \operatorname{tg}\delta_{min} = -\frac{1}{2\,C'\cos\Delta}\left(C'^2-1+\sqrt{(C'^2-1)^2+4C'^2\cos^2\Delta}\right)$$

$$\text{b.)}\ \operatorname{tg}\delta_{max} = -\frac{1}{2\,C'\cos\Delta}\left(C'^2-1-\sqrt{(C'^2-1)^2+4C'^2\cos^2\Delta}\right),$$

$$\text{wo: } C' = \frac{A_\perp}{A_{''}}\frac{\rho_\perp}{\rho_{''}}\operatorname{ctg}\alpha \text{ ist.}$$

Man könnte versuchen, die Formel 5.) bei bekanntem $\rho_\perp/\rho_{''}$ zur Berechnung von Δ heranzuziehen. Beobachtet man z. B. δ_{min}, so kann man Δ aus 5a.) im Prinzip berechnen. Praktisch scheitert das daran, daß die Einstellung auf das Minimum, so lange es nicht absolut dunkel wird wie bei $\Delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc., zu ungenau

ist. In der Nähe von $\Delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc. wiederum ändert sich diese Einstellung viel zu wenig mit der Phasendifferenz. (Näheres siehe p. 36.)

Dagegen hatte bereits Schulz vorgeschlagen, die Helligkeitsschwankung $J_{max}—J_{min}$, welche ja eine Funktion von Δ ist, photometrisch zu messen und auf diese Weise die Phasendifferenz Δ zu bestimmen; auch hatte er selbst bereits einige diesbezügliche Messungen angestellt, von denen noch später die Rede sein wird. Inwieweit und ob diese Methode zur Bestimmung von Δ überhaupt praktisch zu verwerten ist, sollte in der vorliegenden Arbeit zunächst untersucht werden.

Die Helligkeitsschwankung $J_{max}—J_{min}$ hängt außer von Δ und den bekannten Größen α, $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ noch von der Intensität des auffallenden Strahles s (Fig. 2) und von $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ ab. Die Art dieser Abhängigkeit war theoretisch zu ermitteln. Erst dann kann man in jedem einzelnen Falle aus der gemessenen Helligkeitsschwankung bei bekanntem $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ die Phasendifferenz Δ berechnen; denn die Intensität des einfallenden Strahles s läßt sich leicht[1]) eliminieren. Die Eigentümlichkeit und der Wert der Methode liegt also darin, daß man nach ihr die Phasendifferenz ohne kompensierende Vorrichtung (Soleil-Babinetscher Kompensator, $\lambda/4$-Blättchen oder dergl.) bestimmen kann.

Gleichzeitig mit diesem ersten Problem sollte ein zweites in Angriff genommen werden. Wie oben erwähnt, war es Schulz gelungen, im Falle $\Delta = 0, \pm\pi$ etc. den Zusammenhang zwischen δ_{sp} und $\rho_{\perp}/\rho_{\parallel}$, zwischen dem Verdopplungssprung und den Amplitudenänderungen, explicite anzugeben (Formel 4).

Mit Hilfe der Formel 4.) berechnete Schulz das Verhältnis $\rho_{\perp}/\rho_{\parallel}$ bei mehreren Glasflächen von verschiedenem Brechungsquotienten n. Die gefundenen Werte stimmten mit den Fresnel'schen Reflexionsformeln:

---

1) Z. B. indem man gleichzeitig die Helligkeitsschwankung an der entsprechenden Stelle im direkten Phänomen mißt.

$$\rho_{\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)}; \quad \rho_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}$$

(φ der Einfallswinkel, χ der Brechungswinkel an der Fläche Fl.) nur bei nahezu senkrechter und nahezu streifender Inzidenz überein; in der Umgebung des Brewsterschen Winkels zeigten sich durchweg beträchtliche, mit n zunehmende Abweichungen (vgl. Schulz l. c. Tafel III und IV). Da das reflektierte Licht in der Nähe des Brewsterschen Winkels nicht mehr linear, sondern elliptisch polarisiert ist, so ging schon aus diesen Abweichungen deutlich hervor, daß δ_{sp} außer von $\rho_{\perp}/\rho_{\parallel}$ auch von Δ abhängt. Also auch die Phasendifferenz ihrerseits bewirkt ebenso wie die Amplitudenänderung eine Wanderung des Verdopplungssprunges[1]). Nun kann man offenbar wieder umgekehrt aus der beobachteten Wanderung des Verdopplungssprunges bei bekanntem $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ die Phasendifferenz Δ berechnen, wenn es gelingt, δ_{sp} als Funktion von $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ und Δ, von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen, darzustellen.

Dies sollte versucht werden. Die zweite Aufgabe lautete daher: Es ist im allgemeinen Falle $\Delta \neq 0$ etc. die Lage des Verdopplungssprunges in Abhängigkeit von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen zu ermitteln.

So begann ich die vorliegende Arbeit auf Anregung meines hochverehrten Lehrers Herrn Professor Lummer zunächst an Hand der beiden genannten Probleme. Hierbei wurde ich zu der neuen empfindlichen Methode der Elliptizitätsmessung geführt, deren Darlegung den Hauptgegenstand dieser Arbeit bildet. Die beiden Ausgangsprobleme sind in den beiden nächsten Paragraphen behandelt.

---

[1]) Die Abweichungen sind nicht daraus zu erklären, daß die Fresnelschen Formeln in der Nähe des Brewsterschen Winkels ihre strenge Gültigkeit verlieren; denn dann hätten sie gerade im entgegengesetzten Sinne zu erfolgen.

§ 2.

Die Helligkeitsschwankung im Doppelstreifensystem als Funktion von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen.

Theorie.

Um die Helligkeitsschwankung an der Stelle $\mathcal{M}$ zwischen zwei Hauptstreifen im indirekten Phänomen (Fig. 3 p. 12) zu berechnen, welche eintritt, wenn man den Analysator bei feststehendem Polarisator dreht, wurde der von Schulz abgeleitete Ausdruck 3.) (p. 16) für die Intensitätsverteilung benützt. Er ist nur dann gültig, wenn das direkte Phänomen durch Reflexion an einer isotropen Fläche Fl. zum indirekten Phänomen wird. Demgemäß gelten auch die folgenden Berechnungen nur dann in Strenge, wenn die reflektierende Fläche Fl. isotrop ist.

Ersetzt man im Ausdruck 3.) noch $\triangle$ durch $-\triangle$, um mit der von P. Drude gebrauchten, jetzt meist üblichen Bezeichnungsweise der Phasendifferenz in Einklang zu kommen[1]), und läßt den Index r weg, da es sich ja immer nur um die an der Luftschicht LL (Fig. 2) reflektierten Strahlen s_1, s_2, s_3 etc. handelt, also um die Herschel'schen Streifen im reflektierten Lichte, so erhält man:

$$6.) \quad J = M_{\perp}^2 (A_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) + M_{\parallel}^2 (A_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2) + 2 M_{\perp} M_{\parallel} [\cos \triangle (A_{\perp} A_{\parallel} + B_{\perp} B_{\parallel}) - \sin \triangle (A_{\perp} B_{\parallel} - B_{\perp} A_{\parallel})]$$

worin wie früher $M_{\perp}$ und $M_{\parallel}$ die auf p. 16, $A_{\perp} A_{\parallel}$ und $B_{\perp} B_{\parallel}$ die auf p. 14 genannten Bedeutungen haben. Die Hauptminima sind ausgezeichnet durch $\sin^2\beta/2 = 0$, d. h. $\beta = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ etc.; dazwischen liegen die Stellen $\beta = \pi$, 3π, 5π etc. mit $\sin^2 \beta/2 = 1$, für welche die Intensitätsschwankung $J_{max} - J_{min}$ berechnet werden soll.

Zu diesem Zwecke hat man den Ausdruck $J_{\sin^2\beta/2=1}$ nach δ zu differenzieren und gleich 0 zu setzen. Daraus ergibt

---

[1]) Drude definiert die Phasendifferenz $\triangle$ positiv, wenn die $\perp$ polarisierte Komponente der // polarisierten in der Phase vorauseilt.

sich zunächst die Analysatorstellung δ_{max} und δ_{min}. Führt man schließlich die Werte von δ_{max} und δ_{min} in den Ausdruck $J_{\sin^2\beta/2=1}$ ein, so bekommt man die Größen J_{max} und J_{min} selbst, deren Differenz die gesuchte Intensitätsschwankung ist.

Es ist nun:

7.) $$J_{\sin^2\beta/2=1} = M_\perp^2 A'^2_\perp + M_\parallel^2 A'^2_\parallel + 2 M_\perp M_\parallel A'_\perp A'_\parallel \cos\triangle,$$

wo: $A'_\perp = \frac{2\sigma_\perp}{1+\sigma_\perp^2}$; $A'_\parallel = \frac{2\sigma_\parallel}{1+\sigma_\parallel^2}$

ist. Denn bei $\sin^2\beta/2 = 1$ wird $\sin\beta = 0$; daher verschwinden die $B_\perp B_\parallel$ und die $A_\perp A_\parallel$ p. 14 nehmen die spezielle Form $A'_\perp$ und $A'_\parallel$ an.

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \delta}\right)_{\sin^2\beta/2=1} = \frac{\partial J}{\partial M_\perp}\cdot\frac{\partial M_\perp}{\partial \delta} + \frac{\partial J}{\partial M_\parallel}\frac{\partial M_\parallel}{\partial \delta}$$

oder, da: $M_\perp = \rho_\perp \cos\alpha \,.\, \cos\delta$, $M_\parallel = \rho_\parallel \sin\alpha \,.\, \sin\delta$ ist,

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \delta}\right)_{\sin^2\beta/2=1} = -2\,(M_\perp A'^2_\perp + M_\parallel \cos\triangle\, A'_\perp A'_\parallel)\,\rho_\perp \cos\alpha \,.\, \sin\delta + 2\,(M_\parallel A'^2_\parallel + M_\perp \cos\triangle\, A'_\perp A'_\parallel)\,\rho_\parallel \sin\alpha \,.\, \cos\delta.$$

Dies ist gleich 0 zu setzen für den Fall des Maximums oder Minimums. Man erhält, wenn man noch für $M_\perp M_\parallel$ die entsprechenden Ausdrücke einsetzt, schließlich:

$$\cos\delta \,.\, \sin\delta\,(\sin^2\alpha\,\rho_\parallel^2 A'^2_\parallel - \cos^2\alpha\,\rho_\perp^2 A'^2_\perp) + \cos\alpha \,.\, \sin\alpha\,\rho_\perp\rho_\parallel A'_\perp A'_\parallel \cos\triangle\,(\cos^2\delta - \sin^2\delta) = 0$$

oder:

8.) $$\operatorname{tg} 2\delta_{\substack{max\\min}} = \frac{\sin 2\alpha\,\rho_\perp\rho_\parallel A'_\perp A'_\parallel \cos\triangle}{\cos^2\alpha\,\rho_\perp^2 A'^2_\perp - \sin^2\alpha\,\rho_\parallel^2 A'^2_\parallel}$$

Diese einfache Formel, welche δ_{max} und δ_{min} gleichzeitig enthält, ist indentisch mit den schon von Schulz abgeleiteten Ausdrücken 5) (p. 18). Da sich aber aus 8) immer nur zwei um 90° verschiedene Werte von δ ergeben[1]), so lehrt dieser Ausdruck, daß die Analysatorstellungen δ_{max} und δ_{min} stets um genau 90° verschieden sind.

---

[1]) Werte von δ, welche um 180° verschieden sind, bedeuten offenbar dieselbe Analysatorstellung.

Setzt man den Ausdruck 8), in 7) ein, wobei man sich am besten der trigonometrischen Identitäten:

$$2 \sin \delta \cos \delta = \sin 2\delta$$

$$\sin 2\delta = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 2\delta}{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta}}$$

$$\cos^2 \delta = \frac{1 + \cos 2\delta}{2}$$

$$\sin^2 \delta = \frac{1 - \cos 2\delta}{2}$$

$$\cos 2\delta = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta}}$$

bedient, so folgt nach kurzer Zwischenrechnung:

9.) $$J_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{1}{2} \left\{ A'^2_{\perp} \rho^2_{\perp} \cos^2\alpha + A'^2_{\parallel} \rho^2_{\parallel} \sin^2\alpha \pm \sqrt{\left(A'^2_{\perp} \rho^2_{\perp} \cos^2\alpha - A'^2_{\parallel} \rho^2_{\parallel} \sin^2\alpha \right)^2 + \sin^2 2\alpha \rho^2_{\perp} \rho^2_{\parallel} A'^2_{\perp} A'^2_{\parallel} \cos^2 \Delta} \right\},$$

wo sich das positive Vorzeichen der Wurzel auf das Maximum, das negative auf das Minimum bezieht.

Ist $\Delta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc., d. h. $\cos \Delta = \pm 1$, so wird die Wurzel gleich dem vor ihr stehenden zweigliedrigen Ausdruck, J_{min} also gleich 0. Dann und nur dann ist das Minimum ein absolutes. Ist $\Delta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc., d. h. $\cos \Delta < 1$, so ist die Wurzel kleiner als der zweigliedrige Ausdruck; das Minimum erfährt eine Aufhellung. Das entspricht dem in § 1 (p. 18) erwähnten Verhalten der Erscheinung.

Die Intensitätsschwankung zwischen Maximum und Minimum wird nach 9) durch die Wurzel selbst dargestellt, sie ist daher:

10.) $$dJ_{\sin^2 \beta/2 = 1} = \sqrt{\left(A'^2_{\perp} \rho^2_{\perp} \cos^2\alpha - A'^2_{\parallel} \rho^2_{\parallel} \sin^2\alpha \right)^2 + \sin^2 2\alpha \cdot \rho^2_{\perp} \rho^2_{\parallel} A'^2_{\perp} A'^2_{\parallel} \cos^2 \Delta}$$

Dieser Ausdruck wird tatsächlich kleiner, wenn (ceteris paribus) Δ von 0 bis auf $\pm\pi/2$ gebracht wird; er redu-

ziert sich im Falle $\Delta = \pm \pi/2$ ($3\pi/2$, $5\pi/2$ etc.) auf [das erste Glied] $A'_{\perp}{}^2 \rho_{\perp}{}^2 \cos^2\alpha - A'_{\parallel}{}^2 \rho_{\parallel}{}^2 \sin^2\alpha$. Aber auch dieses Glied kann beliebig klein werden. Macht man nämlich $\alpha = 45^0$ und beobachtet zwischen zwei Hauptstreifen dicht an der Grenze der Totalreflexion, etwa zwischen I und II, so wird $\cos\alpha = \sin\alpha$ und $\sigma_{\perp}$ fast $= \sigma_{\parallel}$, $A'_{\perp}$ also nahezu $= A'_{\parallel}$ (p. 22), nahezu $= 1$. Ist außerdem noch:

$$\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = \rho ,$$

so verschwindet das erste Glied und die Formel 10) reduziert sich auf:

11.) $$dJ_{\sin^2\beta/2 = 1} = \rho^2 \cos\Delta ;$$

dann bewegt sich die Intensitätsschwankung zwischen ρ^2 und 0.

Die einfache Form des Ausdrucks 11.) ist kein Zufall, sondern erklärt sich aus dem folgenden allgemeinen Zusammenhange.

Schon in § 1 ist bei der Besprechung des direkten Phänomens (p. 11) erwähnt worden, daß die maximale Verdopplung, d. h. absolute Dunkelheit an der Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ zwischen zwei Hauptstreifen, ungefähr dann eintritt, wenn der erste der Einzelstrahlen s_1 durch den Analysator ausgelöscht wird. Schulz konnte dies auch theoretisch nachweisen. Ebenso findet größte Helligkeit statt, wenn s_1 den Analysator ungehindert passiert.

Es läßt sich nun überhaupt ganz allgemein, auch für das indirekte Phänomen mit oder ohne Phasendifferenz Δ, zeigen, daß sich die Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ in ihrer Intensität hauptsächlich nach dem Strahl s_1 allein richtet. Der Strahl s_1 (Fig. 2) verläßt den Interferenzwürfel mit den Hauptkomponenten $\sigma_{\perp} \cos\alpha$ und $\sigma_{\parallel} \sin\alpha$.[1]) Nach der Reflexion an der isotropen Versuchsfläche Fl. sind seine Komponenten $\sigma_{\perp}\rho_{\perp} \cos\alpha$ bezw.

[1]) Die Amplitude des durch den Polarisator kommenden Strahles s ist gleich 1 gesetzt; die gleichmäßige Schwächung der Hauptkomponenten beim Ein- und Austritt in den Interferenzwürfel ist hier wie immer außer acht gelassen.

$\sigma_{\shortparallel}\rho_{\shortparallel}\sin\alpha$ mit der relativen Phasendifferenz $\triangle$. Auf den Analysator trifft also eine Schwingungsellipse von bestimmter Größe, Achsenverhältnis und Neigung. Maximum und Minimum der Helligkeit muß dann stattfinden, wenn die Schwingungsrichtung des Analysators mit der großen bezw. kleinen Achse der Ellipse zusammenfällt. Diese Richtungen sind aber aus den Hauptkomponenten der Ellipse und der Phasendifferenz $\triangle$ leicht zu berechnen. Ich benützte dazu die in Pockels' Krystalloptik[1]) (p. 9) zusammengestellten Formeln und erhielt:

8a). $$\operatorname{tg} 2\,\delta_{1\,\substack{\max\\\min}} = \frac{\sin 2\alpha\,\rho_{\perp}\rho_{\shortparallel}\sigma_{\perp}\sigma_{\shortparallel}\cos\triangle}{\cos^2\alpha\rho_{\perp}^{\,2}\sigma_{\perp}^{\,2} - \sin^2\alpha\,\rho_{\shortparallel}^{\,2}\sigma_{\shortparallel}^{\,2}};$$

ebenso für die Intensitätsschwankung zwischen Maximum und Minimum (die Differenz der Quadrate der beiden Halbachsen):

10a.) $$dJ_1 = \sqrt{(\sigma_{\perp}^{\,2}\rho_{\perp}^{\,2}\cos^2\alpha - \sigma_{\shortparallel}^{\,2}\rho_{\shortparallel}^{\,2}\sin^2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha\,\rho_{\perp}^{\,2}\rho_{\shortparallel}^{\,2}\sigma_{\perp}^{\,2}\sigma_{\shortparallel}^{\,2}\cos^2\triangle}.$$

Diese Ausdrücke haben ganz dieselbe Gestalt wie die entsprechenden 8.) und 10.), welche zum Vergleich noch einmal ausführlich wiedergegeben seien:

8.) $$\operatorname{tg} 2\,\delta_{\substack{\max\\\min}} = \frac{\sin 2\alpha\cdot\rho_{\perp}\cdot\rho_{\shortparallel}\,\sigma_{\perp}\,\sigma_{\shortparallel}\,\dfrac{1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2}}{1+\sigma_{\perp}^{\,2}}\cos\triangle}{\cos^2\alpha\,\rho_{\perp}^{\,2}\,\sigma_{\perp}^{\,2}\left(\dfrac{1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2}}{1+\sigma_{\perp}^{\,2}}\right)^2 - \sin^2\alpha\,\rho_{\shortparallel}^{\,2}\,\sigma_{\shortparallel}^{\,2}}$$

10.) $$dJ_{\sin^2/\beta_2=1} = \sqrt{\left[\frac{4\sigma_{\perp}^{\,2}}{(1+\sigma_{\perp}^{\,2})^2}\rho_{\perp}^{\,2}\cos^2\alpha - \frac{4\sigma_{\shortparallel}^{\,2}}{(1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2})^2}\rho_{\shortparallel}^{\,2}\sin^2\alpha\right]^2 + \sin^2 2\alpha\,\rho_{\perp}^{\,2}\rho_{\shortparallel}^{\,2}\sigma_{\perp}^{\,2}\sigma_{\shortparallel}^{\,2}\frac{16}{(1+\sigma_{\perp}^{\,2})^2(1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2})^2}\cos^2\triangle}$$

Der einzige Unterschied besteht in den Faktoren:

$$\frac{1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2}}{1+\sigma_{\perp}^{\,2}};\quad \left(\frac{1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2}}{1+\sigma_{\perp}^{\,2}}\right)^2;\quad \frac{4}{(1+\sigma_{\perp}^{\,2})^2};\quad \frac{4}{(1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2})^2};$$

$$\frac{16}{(1+\sigma_{\perp}^{\,2})^2(1+\sigma_{\shortparallel}^{\,2})^2};$$

---

1) F. Pockels, Lehrbuch der Krystalloptik, Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1906.

aber auch diese Faktoren nähern sich sämtlich dem Werte 1, wenn sich $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ der 1 nähert, d. h. wenn man dicht an der Grenze der Totalreflexion beobachtet. In diesem Falle ist δ_{max}, δ_{min}, dJ an der Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$, hervorgerufen durch die Strahlen s_1, s_2, $s_3 \ldots s_\infty$, nahezu indentisch mit $\delta_{1\,max}$, $\delta_{1\,min}$, dJ_1 hervorgerufen durch den Strahl s_1 allein.

Wählt man z. B. $\alpha = 45^0$; $\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = \rho$ (wie p. 24 angenommen wurde), so sind die Hauptkomponenten des Strahles s_1 einander fast gleich. Tritt noch die Phasendifferenz $\pm \pi/2$ hinzu, so resultiert eine zirkulare Schwingung, deren Intensität durch den Analysator gesehen, sich nicht ändern darf, wenn man den Analysator dreht. Demgemäß ist auch die Intensitätsschwankung $dJ_{\sin^2\beta/2=1}$ hervorgerufen durch s_1 bis s_∞, gleich 0, wie schon aus Formel 11 (p. 24) gefolgert wurde.

Die Übereinstimmung der Formeln 8 und 8a, 10 und 10a, die Tatsache, daß sich die Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ um so mehr nach dem Strahl s_1 allein richtet, je grösser $\sigma_{\perp}$ und $\sigma_{\parallel}$ ist, läßt sich rein physikalisch verstehen. Denn erstens beträgt der Gangunterschied β der an dieser Stelle interferierenden Einzelstrahlen gerade π oder 3π, 5π u. s. f., also ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge, zweitens werden die Strahlen s_2 bis s_∞ untereinander an Intensität immer ähnlicher, je näher man der Grenze der Totalreflexion kommt; was von den Strahlen selbst gilt im unpolarisierten Lichte, gilt im polarisierten Lichte beim direkten und indirekten Phänomen von entsprechenden Komponenten. Die Strahlen s_2 bis s_∞ lassen sich paarweise so zusammenfassen, daß ihre Gesamtwirkung verschwindet. Das gilt aber nur für die Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ und daher kommt man nicht etwa mit der naheliegenden Erklärung aus, daß dicht an der Grenze der Totalreflexion der Strahl s_1 an Intensität alle anderen überwiegt; denn dann dürften die Hauptstreifen ($\sin^2\beta/2 = 0$) nicht unverändert dunkel bleiben, wie auch der Analysator steht, zumal wenn s_1 den Analysator ungehindert passiert.

Durch den eben entwickelten Zusammenhang der Stelle $\sin^2\beta/2=1$ mit dem Strahl s_1, welcher ganz allgemein erwiesen ist, wird das Bindeglied zwischen direktem und indirektem Phänomen mit oder ohne Phasendifferenz Δ hergestellt. Es gibt stets, mag man das Phänomen im unpolarisierten oder polarisierten Lichte, direkt oder nach der Reflexion an einer beliebigen isotropen Fläche betrachten, eine Stelle ($\sin^2\beta/2=1$) zwischen zwei Hauptstreifen, welche, wenn man nur nahe genug an die Grenze der Totalreflexion herangeht, in ihrer Intensität allein durch den ersten Einzelstrahl s_1 bestimmt wird.

Gleichzeitig wird aber das ursprüngliche Problem dieses Abschnittes auf ein viel einfacheres zurückgeführt. Denn, wenn sich die Stelle $\sin^2\beta/2=1$ in ihrer Intensitätsschwankung nur nach s_1 richtet, so braucht man eben statt des ganzen Komplexes von interferierenden Strahlen (s_1 bis s_∞) nur noch ein einziges Strahlenbündel (s_1) und wenn s_1 ohnehin annähernd total reflektiert wird, so kann man den Interferenzwürfel überhaupt fortnehmen und das durch den Polarisator tretende Licht direkt an der Fläche Fl. reflektieren lassen. Dann lautet unser Problem aber einfach folgendermaßen:

Man lasse ein linear polarisiertes Strahlenbündel unter bestimmtem Einfallsazimut auf die Versuchsfläche auffallen, fange die reflektierte elliptische Schwingung mit einem Analysator auf und stelle diesen einmal auf größte Helligkeit, J_{max} (in die große Achse der Ellipse) und einmal auf größte Dunkelheit, J_{min} (in die kleine Achse). J_{max} und J_{min} werde photometrisch gemessen. Aus der Differenz der gemessenen Werte, der Intensitätsschwankung, soll die Phasendifferenz Δ der beiden Hauptkomponenten berechnet werden, wenn die Amplitudenänderungen $\rho_\perp$, $\rho_{\prime\prime}$ bekannt sind.

Ob dies jemals versucht wurde, ist mir nicht bekannt. Mit Formel 10a), in welcher noch $\sigma_\perp = \sigma_{\prime\prime} = 1$ zu setzen ist, ist dieses Problem theoretisch gelöst. Die praktische Durchführung gehört aber nicht mehr in den

Rahmen dieser Arbeit, da sie mit dem Interferenzphänomen nichts mehr zu tun hat.

Es bleibt nur noch übrig, den von der Theorie geforderten Verlauf der Intensitätsschwankung $dJ_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ in Abhängigkeit von Δ, wenigstens in einem Spezialfalle experimentell zu prüfen. Im Anschluß daran wird sich Gelegenheit finden, nochmals auf die praktische Möglichkeit einer photometrischen Bestimmung von Δ zurückzukommen.

Zur Prüfung der Theorie wurde wieder der einfache Fall $\alpha = 45^0$, $\rho_\perp = \rho_{''} = \rho$ (p. 24) gewählt und dicht an der Grenze der Totalreflexion zwischen I und II beobachtet ($\sigma_\perp = \sigma_{''} = 1$), so daß die Formel 11, zu welcher sowohl der Ausdruck 10) als der Ausdruck 10a) führt, in Anwendung kommt. Berechnet man die Intensitätsschwankung nach dieser Formel und trägt dJ als Ordinate, Δ als Abszisse auf, so erhält man die theoretische Kurve T (Kosinuslinie)[1] auf Tafel 1.

Um beliebige meßbare Phasendifferenzen Δ erzeugen zu können, benützte ich einen Soleil-Babinet'schen Kompensator für paralleles Licht, dessen Längsrichtung mit der Hauptebene zusammenfiel. Damit ist die Bedingung $\rho_\perp = \rho_{''} = \rho$ streng erfüllt; denn die bekannte Konstruktion des Kompensators bringt es mit sich, daß beide Hauptkomponenten beim Durchtritt um gleich viel geschwächt werden, weil jede von ihnen einmal parallel und einmal senkrecht zur Krystallachse schwingt, also einmal als außerordentlicher und einmal als ordentlicher Strahl.

Die folgenden Messungen wurden in ähnlicher Weise schon von Schulz angestellt. Schulz hatte bereits rein experimentell, indem er die Helligkeitsschwankung bei verschiedenen Werten der Phasendifferenz photometrisch maß, eine bestimmte Abhängigkeit des dJ von Δ gefunden, wobei er sich zur Erzeugung der Phasendifferenz eines

---

[1]) Die Ordinate bei $\Delta = 0$ ist willkürlich gleich 1 gesetzt.

$\lambda/4$-Blättchens bediente. Während aber die theoretischen Formeln, sowohl die allgemeinen 10) und 10a), als die spezielle 11) ergeben, daß diese Abhängigkeit cosinusförmig ist, läßt die von Schulz gefundene Kurve (l. c. p. 27) auf einen viel komplizierteren Zusammenhang schließen.

Die Schulz'schen Beobachtungen sind aber gerade deshalb nicht zur Prüfung der Theorie geeignet, weil er ein $\lambda/4$-Blättchen verwandte. Man kann zwar durch Drehung des Blättchens den beiden Hauptkomponenten[1]) eines hindurchtretenden linearpolarisierten Lichtstrahls jede beliebige Phasendifferenz Δ erteilen; die Größe dieser Phasendifferenz ist aber im allgemeinen[2]) nicht mehr unabhängig von der Schwingungsrichtung der auffallenden Welle wie beim Kompensator. Da die Einzelstrahlen s_1, s_2 (Fig. 2) etc. in ganz verschiedenen Ebenen schwingen (vgl. p. 10), so erhalten ihre Hauptkompenenten durch das $\lambda/4$-Blättchen ganz verschiedene Phasendifferenzen Δ. Das ist aber gegen die Voraussetzung der Theorie und darum lassen sich die von Schulz gefundenen Werte der Intensitätsschwankung dJ überhaupt nicht mit dieser Theorie vergleichen.

Aufbau. Meßmethode.

Der Apparat stimmt im wesentlichen mit dem von Schulz benützten überein, weicht aber in einigen Punkten ab. Da dieselbe Versuchsanordnung später (§ 4) mit einigen Abänderungen und Vereinfachungen wiederkehrt, soll Aufbau, Justierung etc. schon jetzt ausführlich besprochen werden.

Als Lichtquelle diente die lichtstarke Quarzglas-Quecksilberlampe Hg. (Fig. 4) von Heräus, deren Licht

---

[1]) Es sei hier nochmals auf den Unterschied der p. 15 definierten Hauptkomponenten, welche auch bei der Definition von Δ zugrunde lagen und der Hauptrichtungen des drehbaren $\lambda/4$-Blättchens aufmerksam gemacht.

[2]) Bis auf den Fall $\Delta = \pi/2$ selbst, wo die Hauptrichtungen des Blättchens mit den Hauptkomponenten zusammenfallen.

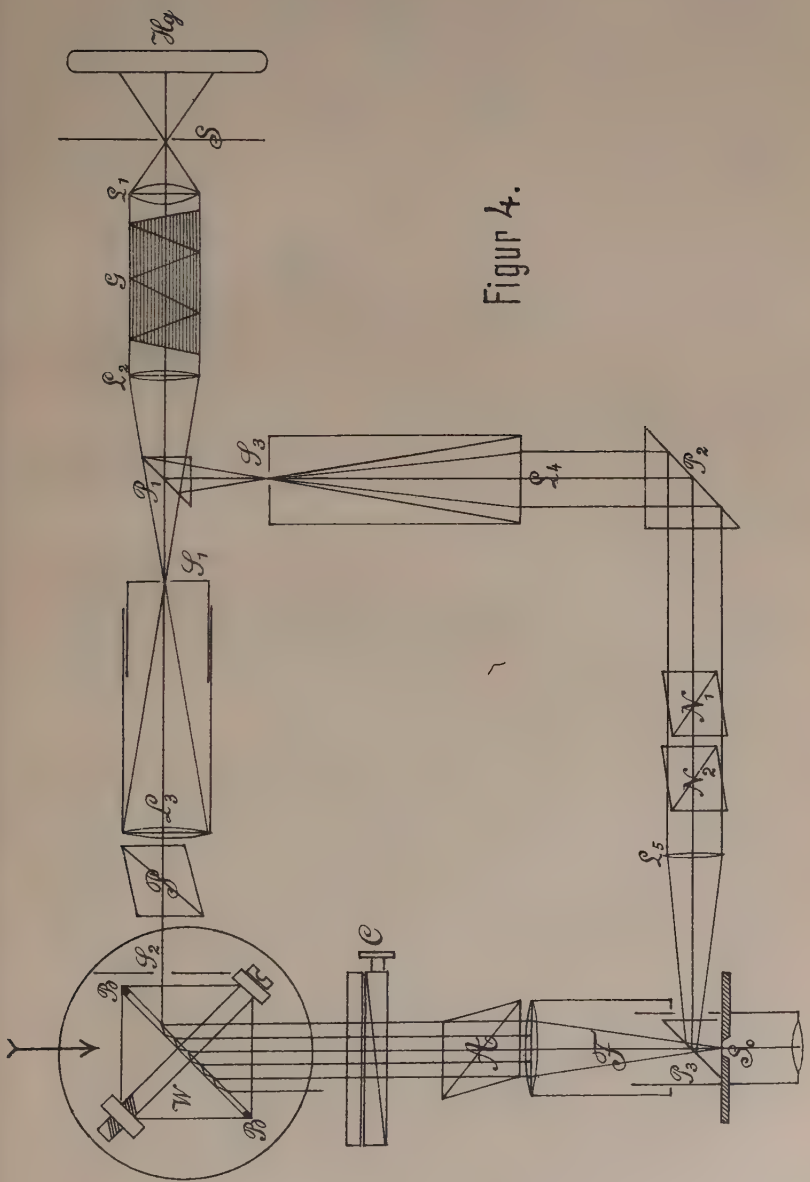
durch das Gradsichtprisma G spektral zerlegt und durch die Linsen L_1 und L_2 so konzentriert wurde, daß das der hellgrünen Quecksilberlinie ($\lambda = 546$ $\mu\mu$) entsprechende Bild des leuchtenden Spaltes S auf den Kollimatorspalt S_1 fiel. S_1 befand sich im Brennpunkt der Kollimatorlinse L_3. Vom Kollimator gelangten parallele, annähernd homogene Strahlen durch ein polarisierendes Nicolsches Prisma P nach dem Interferenzwürfel W. Von dort, ungefähr unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion reflektiert, durchsetzten sie den Soleil-Babinetschen Kompensator für paralleles Licht C und drangen schließlich durch den Analysator A in das Beobachtungsfernrohr F ein, welches auf unendlich eingestellt wurde.

Der Würfel W stand auf dem Tisch eines Spektrometers mit Winkelskala. Auf dem Spektrometer war das Kollimatorrohr und das Beobachtungsfernrohr, letzteres drehbar um die Achse des Tisches, befestigt. Die Luftschicht zwischen den Würfelprismen[1]) wurde durch zwei sehr dünne schmale Streifen von Aluminiumfolie (B, B) gebildet.

Zur Herstellung der Planparallelität genügt es, wenn man die Streifen mit bloßem Auge betrachtet, auf unendlich akkommodiert und an den beiden Schrauben des Würfelgestells (in Fig. 4 ist nur die obere zu sehen) so lange dreht, bis sich der Abstand der Streifen von Stelle zu Stelle nicht mehr ändert.

Betrachtet man die Erscheinung zunächst ohne die beiden Nicols und den Kompensator durch das Fernrohr F, so sieht man, parallel zur Grenze der Totalreflexion verlaufend, im gewöhnlich reflektierten Gebiete ein System paralleler, schwach nach dem Einfallslote zu gekrümmter dunkler Interferenzstreifen, die „Herschel'schen Streifen". Die Schärfe der Streifen welche in unmittelbarer Nähe des Grenzwinkels außerordentlich groß ist, (der erste Herschelsche Streifen I und auch noch der zweite II ist haarscharf), wird mit dem Abstande vom Grenzwinkel schnell geringer.

[1]) Es waren Glasprismen vom Brechungsquotienten $n = 1{,}518$ für das benützte Licht.



Figur 4.

Gleichzeitig nimmt der Abstand benachbarter Streifen zu. Derselbe betrug bei meiner Anordnung zwischen I und II ungefähr 20 Winkelminuten. Man kann die Deutlichkeit des Phänomes noch erhöhen, indem man dicht vor den Interferenzwürfel eine spaltförmige Öffnung S_2 anbringt und sich mit Hilfe dieser Blende eine kleine, am besten planparallele und ebene Stelle der Luftschicht heraussucht[1]).

Das Gesichtsfeld wird rechts und links durch die Ränder des in der Brennebene abgebildeten Kollimatorspaltes S_1 begrenzt. Um einen größeren Teil der Erscheinung gleichzeitig überblicken zu können, hat man also den Kollimatorspalt möglichst weit zu öffnen. Eine Drehung des Spektrometertisches mit dem Würfel bewirkt außer einer Ablenkung des Spaltbildes auch eine Wanderung der Interferenzstreifen, welche dasselbe durchziehen. Daher kann man jeden gewünschten Teil der Erscheinung zwischen die Ränder des Gesichtsfeldes bekommen.

An dem von mir benutzten Spektrometer ließ sich der Kollimatorspalt nicht weiter öffnen, als so, daß gerade noch 2 Streifen (die ersten beiden) gleichzeitig sichtbar wurden. Um die richtige Stellung des Würfels ohne längeres Ausprobieren rasch zu finden, schlägt man am besten folgendes Verfahren ein.

Man blickt von der dem Kollimator abgewandten Seite des Würfels durch den Würfel und den Polarisator hindurch, indem man auf unendlich akkommodiert, nach dem Collimatorspalt S_1. Gleichzeitig beleuchtet man mit irgend einer Lichtquelle von der Pfeilrichtung her (Fig. 4). Dann sieht man den Kollimatorspalt von hellglänzenden Interferenzmaximis durchzogen, welche dem dunklen Streifen im reflektierten Lichte entsprechen. Diese Maxima setzen sich außerhalb des Spaltes fort in die Minima auf hellem Grunde, welche von der Hilfsbeleuchtung herrühren und die vom ersten Streifen an sämtlich zu übersehen

[1]) O. Lummer, Sitzungber. d. k. Akad. d. Wissensch. Berlin, 3. Mai 1900.

sind. Durch Drehung des Würfels kann man jetzt ganz leicht z. B. den ersten und zweiten hellen Streifen in den Kollimatorspalt hineindirigieren. Ist dies geschehen, dann erscheinen auch, durch F gesehen, die entsprechenden dunklen Streifen I und II im Gesichtsfelde.

Schaltet man noch den Polarisator P und den Analysator A in den Strahlengang und hält einen der beiden Nicols fest, um einen bestimmten Winkel gegen die Einfallsebene des Interferenzwürfels geneigt, so beobachtet man beim Drehen des anderen das auf p. 11 ff. beschriebene Lummersche Verdopplungsphänomen. Bei den Versuchen wurde stets der Polarisator festgehalten und nur der Analysator gedreht.

Zur Bestimmung des Nullpunktes der Polarisator- und Analysatorskala wurde folgendes Kriterium benützt: Die Schwingungsrichtung des Polarisators fällt mit der Einfallsebene des Würfels, der „Hauptebene", zusammen oder steht senkrecht auf ihr und die Schwingungsrichtung des Analysators steht gleichzeitig senkrecht zu der des Polarisators, liegt also senkrecht bezw. parallel zur Hauptebene, wenn das ganze Phänomen gleichmäßig dunkel erscheint (theoretisch absolut dunkel). Eine geringe Abweichung der Nicols von dieser Stellung nach der einen oder anderen Seite läßt sofort die Doppelmaxima m m der Figur 3 (D) auf dunklem Hintergrunde hervortreten.

Hat man den Polarisator auf diese Weise in die Hauptebene, den Analysator senkrecht dazu orientiert, so bringt man den Kompensator C ein, stellt ihn ungefähr auf $+\pi$ oder $-\pi$ und dreht ihn solange um den Strahlengang als Achse, bis wieder gleichmäßige Dunkelheit erreicht ist; dann fällt seine Längsrichtung, wie erforderlich, mit der Hauptebene zusammen.

Auch die Eichung des Kompensators kann mit großer Genauigkeit am Phänomen selbst vorgenommen werden. Darauf komme ich in § 4 zurück.

Der noch nicht besprochene, aus Figur 4 ersichtliche übrige Teil des Aufbaus dient zur Messung der Hellig-

keiten bezw. Helligkeitsschwankungen im Interferenzphänomen.

Durch das totalreflektierende Prisma P_1, welches sich etwas unterhalb des Kollimatorspaltes S_1 befindet, wird ein Teil der Lichtstrahlen abgelenkt, so daß auch bei S_3 ein hellgrünes Bild des Spaltes S entsteht. Der Spalt S_3 wiederum wird mit Hilfe der beiden Linsen L_4 und L_5 und der total reflektierenden Prismen P_2 und P_3 auf der vorderen, mit der Brennebene des Fernrohres F zusammenfallenden Kathetenfläche des Prismas P_3 abgebildet. Das Prisma P_3 nimmt nur die untere Hälfte des Gesichtsfeldes ein, die obere wird von der Interferenzerscheinung erfüllt. Beide Hälften stoßen in der scharfen oberen Kante der Kathetenfläche zusammen, wodurch eine Photometrie auf 5—10% ermöglicht wird. Zwischen P_2 und L_5, wo paralleler Strahlengang herrscht, sind die beiden Nicolschen Prismen N_1 und N_2 angebracht, von denen N_1 fest, N_2 drehbar ist. Sie gestatten, die Helligkeit der unteren Hälfte des Gesichtsfeldes, des „Vergleichslichtes", meßbar zu verändern; und zwar wurde vorausgesetzt, daß das Licht beim Durchtritt durch den Nicol N_2 im Verhältnis $\cos^2$ w geschwächt wird (w der Winkel zwischen den Schwingungsrichtungen der Nicols).

Bei der zu messenden Helligkeitsschwankung handelt es sich streng genommen nur um einen unendlich schmalen Bezirk der Interferenzerscheinung, nämlich um die Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ zwischen zwei Hauptreifen, speziell um die Stelle $\beta = 3\,\pi$ zwischen den Streifen I und II. Ich benützte deshalb einen verschiebbaren, vertikalen Okularspalt mit variabler Öffnung (S_0, Fig. 4), durch den die Interferenzerscheinung an der betreffenden Stelle zugleich mit dem Vergleichslicht so weit eingeengt wurde, als die Photometrie erlaubte. Während der Abstand der Streifen I und II, wie oben erwähnt, etwa 20 Winkelminuten betrug, war die Öffnung des Okularspaltes nur 6 Winkelminuten breit.

Die Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ liegt nicht genau in der Mitte zwischen I und II wie in Figur 3, sondern ist nach

den Streifen I hin verschoben, da der Gangunterschied der Winkeldistanz von der Grenze der Totalreflexion nicht direkt proportional ist. Man findet sie, indem man den Kompensator auf Null, den Analysator auf maximale Verdopplung stellt und den Verdopplungsstreifen mit Hilfe des Okularspaltes allmählich einengt, bis man seinen dunkelsten Teil symmetrisch zwischen die Spalträndер gebracht hat. Das ist leichter auszuführen, als man bei der Flachheit des Minimums erwarten sollte. Infolge einer Kontrastwirkung an den Spalträndern schrumpft nämlich der Verdopplungsstreifen scheinbar zusammen. Dadurch erhält er etwa das Aussehen, wie es die gestrichelte, direkt durch Vergrößerung gewonnene Kurve in Figur 3 andeutet: Alle Intensitäten in unmittelbarer Nähe des Minimums ($\mathcal{M}$) werden scheinbar vergrößert (die Ordinaten bei a und b sollen die Ränder des Okularspaltes markieren).

Übrigens kommt diese Kontrastwirkung nur dann zur Geltung, wenn das Minimum absolut dunkel ist, wenn also eine Photometrie desselben ohnehin überflüssig ist. Sonst erscheint der Zwischenraum zwischen den Spalträndern im allgemeinem in ganzer Breite gleich hell. Nur bei sehr kleinen Werten der Phasendifferenz in der Nähe von $\Delta = 0$, wenn der Analysator auf δ_{min} steht, ist der eine Rand etwas dunkler als der andere (die Ursache wird erst aus § 4 klar werden). Um auch dann noch photometrieren zu können, wurde zur Messung von J_{min} bei Nr. 2 und 3 der nächsten Tabellen sowohl auf den rechten Rand als auf den linken Rand (zehnmal) eingestellt und das Mittel daraus genommen. Im übrigen wurden für J_{min} stets zehn, für J_{max} stets zwanzig Einstellungen gemacht.

Messungen.

Gemessen wurde J_{max} und J_{min} (bei $\beta = 3\pi$) bei 7 verschiedenen Phasendifferenzen Δ, von $\Delta = 0$[1]) bis gegen $\Delta = \pi/2$, immer im Abstande von 100 Teilstrichen der Kompensatortrommel, nämlich bei:

[1]) Hier nur J_{max}.

1.	4133
2.	4033
3.	3933
4.	3833
5.	3733
6.	3633
7.	3533

wobei 4133 entspricht: $\triangle = 0$ und 3450 entspricht: $\triangle = \pi/2$.

Auf 2π kommen also 2732 Trommelteile, oder 1 Trommelteil gleich 0,00073 π gleich 0,00037 λ.

Der Winkel α zwischen Polarisator und Hauptebene betrug bei allen Messungen genau 45°. Das gewährt gleichzeitig die Vereinfachung, daß der Nenner von $\operatorname{tg} 2\delta_{\substack{\max \\ \min}}$ (Formel 8 p. 22) nahezu gleich 0 wird, $\operatorname{tg} 2\delta_{\substack{\max \\ \min}}$ selbst gleich unendlich, d. h. $\delta_{\substack{\max \\ \min}} = \pm 45^0$, unabhängig von $\triangle$, so lange man nicht dicht an $\triangle = \pm \pi/2$ herangeht, wo auch der Zähler gleich 0 wird[1]). Die letzte der obigen Phasendifferenzen (3533) ist noch weit genug von $\pi/2$ (3450) entfernt. Daher konnte δ_{min} und δ_{max} durchgängig konstant gelassen werden, umsomehr, als ein kleiner Fehler dieser Einstellungen, je näher man $\pi/2$ kommt, je flacher also Maximum und Minimum sind, eine immer kleinere Änderung der Intensität bewirkt.

Es ergaben sich die folgenden Intensitätsschwankungen:

	Kompensator	$dJ = J_{max} - J_{min}$
$\triangle = 0$	1. 4133	0,498
	2. 4033	0,485
	3. 3933	0,440
	4. 3833	0,379
	5. 3733	0,291
	6. 3633	0,181
	7. 3533	0,071
$\triangle = \pi/2$	3450	

[1]) Das ist eben der Grund, weshalb man δ_{min} nicht selbst zur Messung von Δ benützen kann (vergl. p. 19).

Dabei ist die Intensität des Vergleichslichtes gleich 1 gesetzt, wenn die Nicols N_1 und N_2 parallel sind. Bringt man die Werte von dJ durch passende Multiplikation bei $\Delta = 0$ mit den theoretischen in Übereinstimmung (Kurve T), so erhält man die Kurve der Beobachtungen B (Tafel 1).

Der deutlich cosinusförmige Verlauf von B und die relativ gute Übereinstimmung mit der theoretischen Kurve T muß als Bestätigung der Theorie angesehen werden. Immerhin bleibt noch eine Abweichung, welche sich nicht auf Beobachtungsfehler zurückführen läßt. Denn nach der Zahl und dem Fehler der Einzeleinstellungen wäre höchstens eine Abweichung der Ordinaten von 0,01 im Maßstabe der Tafel 1 zu erklären. Wahrscheinlich wurde aber das Vergleichslicht beim Durchtritt durch den drehbaren Nicol N_2 nicht genau im Verhältnis $\cos^2 w$ geschwächt, wie bei der Berechnung der Intensitäten aus der Stellung von N_2 vorausgesetzt war; denn die richtige Orientierung der Nicols N_1 N_2 zueinander und zum Strahlengange ließ sich nich exakt kontrollieren. Eine weitere Fehlerquelle wird in § 4 (p. 52) berührt werden.

Will man die gemessene Intensitätsschwankung benützen, um rückwärts daraus die Phasendifferenz Δ zu berechnen, so läßt sich jetzt über die Genauigkeit dieser Methode Bestimmtes aussagen.

Sieht man von den eben erwähnten und allen ähnlichen, bei der Kompliziertheit des ganzen Aufbaues allerdings schwer zu vermeidenden Fehlern des Apparates etc. ab, so hängt die Genauigkeit bei verschiedenen Werten von dJ nur ab von den Beobachtungsfehlern und der Form der Kurve T.

Zu jedem photometrisch gemessenen Werte von dJ zwischen 0 und 1 kann man das zugehörige Δ zwischen $\pi/2$ und 0 berechnen. Diese Bestimmung von Δ ist wegen der Form der Kurve T am genauesten in der Nähe von $\Delta = \pi/2$, am ungenauesten in der Nähe von $\Delta = 0$, also bei kleinen Phasendifferenzen, vorausgesetzt, daß

der Fehler in der Messung von dJ überall gleich groß ist. In Wirklichkeit wurde dJ in der Nähe von $\triangle = 0$ etwas genauer gemessen als kurz vor $\triangle = \pi/2$, nämlich (im Maßstabe der Tafel 1) bis auf 0,005 gegen 0,007. Mit Benützung dieser Werte folgt aus der Kurve T, daß $\triangle$ bei kleinen Werten höchstens bis auf $\lambda/_{100}$, in der Nähe von $\pi/2$ höchstens bis auf $\lambda/_{1000}$ bestimmt werden kann. Dazu sind aber bei einer Photometrie auf 5—10 % noch 20 Einstellungen auf J_{max} und 10 Einstellungen auf J_{min} erforderlich. Nach alledem dürfte sich die photometrische Methode nur für größere Phasendifferenzen in der Nähe von $\triangle = \pm \pi/2$ eignen.

Dahingestellt sei, ob man durch Verwendung sehr feiner photometrischer Kriterien etc. die Methode weiter ausbauen und vielleicht auch bei sehr kleinen Phasendifferenzen benützen könnte.

Jedenfalls ist aber das Interferenzphänomen ganz zu entbehren. Denn selbst wenn man sehr weit ab von der Grenze der Totalreflexion beobachtet, so daß der Zusammenhang mit dem Strahl s_1, aufhört, läßt sich leicht zeigen, daß die Messung der Phasendifferenz nur ungenauer wird. Denn im Falle $\sigma_\perp < 1$; $\sigma_{\prime\prime} < 1$; $\sigma_\perp \neq \sigma_{\prime\prime}$ unterscheidet sich der allgemeine Ausdruck 10.) (p. 25) von dem spezialisierten 11.) (p. 24) nur dadurch, daß bei $\triangle = \pi/2$ die Schwankung dJ nicht mehr 0, sondern $A'^2_\perp \rho^2_\perp \cos^2\alpha - A'^2_{\prime\prime} \rho^2_{\prime\prime} \sin^2\alpha$ beträgt. Außerdem wird das mit $\triangle$ behaftete Glied $\cos^2\triangle$ unter der Wurzel nicht mehr mit 1, sondern mit dem echten Bruche $A'^2_\perp A'^2_{\prime\prime}$ multipliziert ($\rho_\perp = \rho_{\prime\prime} = 1$; $\alpha = 45^0$ genommen). D. h., die Kurve der dJ wird flacher und damit die Genauigkeit der Messung von $\triangle$ geringer (vgl. die Kurve C in Tafel 1, welche für $\sigma_\perp = 0{,}2061$, $\sigma_{\prime\prime} = 0{,}5474$ entsprechend dem Brechungswinkel r (Fig. 2) $= 70^0$ [1]) berechnet ist).

---

[1]) Es ist der Brechungsquotient n gleich 1,5 zugrunde gelegt. Die Werte von $\sigma_\perp$, $\sigma_{\prime\prime}$ sind der am Schluß der Schulz'schen Dissertation gegebenen Tabelle der Reflexionskoeffizienten entnommen.

Einen ganz ähnlichen Einfluß wie die Ungleichheit von $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ hat nach 11.) die Ungleichheit von $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$. Der Fall $\rho_\perp = \rho_\parallel = 1$ ist für die Photometrie am günstigsten.

§ 3.

Der Verdopplungssprung in Abhängigkeit von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen.

Im vorigen Abschnitt wurde der Einfluß von Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen auf die Intensität eines sehr schmalen (theoretisch unendlich schmalen) Bezirks an der Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ zwischen zwei Hauptstreifen studiert. Erst das zweite Problem gibt Veranlassung, den ganzen Zwischenraum zwischen zwei Hauptstreifen zu betrachten. Auch dieses Problem wurde zugleich mit dem ersten rein theoretisch in Angriff genommen, noch ehe der im vorigen Paragraphen beschriebene Aufbau begonnen war.

Es handelt sich darum, im allgemeinen Falle $\triangle \neq 0$, π, 2π etc. δ_{sp} als Funktion von $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ und $\triangle$ darzustellen.

Gleich im Anfang erhebt sich die Schwierigkeit der analytischen Formulierung des Verdopplungssprunges. Beim direkten Phänomen vollzieht sich der Übergang aus dem einfachen ins verdoppelte Streifensystem in der auf p. 13 beschriebenen Weise. Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse beim indirekten Phänomen, wenn $\triangle = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ etc. ist (vergl. p. 16). Im Falle $\triangle \neq 0$, $\pm\pi$ etc. dagegen tritt der komplizierte Ausdruck 3.) (p. 16) bezw. 6.) (p. 21) für die Intensitätsverteilung in Kraft, welcher hinsichtlich der Gestalt der Intensitätskurve bei verschiedenen Werten des Analysatorwinkels δ überhaupt noch nicht diskutiert worden ist.

Nach den bisherigen Betrachtungen unterschied sich dieser letzte Fall vom ersten allein dadurch, daß die Intensität bei $\sin^2\beta/2 = 1$ nie mehr gleich 0 wird, sondern nur ein relatives Minimum erreicht. Schulz hatte dies so ausgedrückt: „Bei elliptisch polarisiertem Lichte wird das zweite Minimum niemals absolut dunkel.“ Dabei nahm

er also stillschweigend an, daß der Verdopplungsstreifen (das „zweite Minimum“) an Ort und Stelle, bei $\sin^2\beta 2 = 1$, verbleibt und daß sich die Ausbildung des Doppelstreifensystems auch im Falle $\Delta \neq 0$ etc. immer noch ganz ähnlich abspielt wie beim direkten Phänomen.

Von derselben Annahme ging auch ich zunächst bei der Behandlung dieses Problems aus. Es boten sich dabei 3 mögliche Wege zur Lösung des Problems, entsprechend 3 verschiedenen Formulierungen des Verdopplungssprunges, welche nach dem p. 13 Gesagten und an Hand der Figur 3 leicht verständlich werden.

1.) Einfaches und verdoppeltes Phänomen unterscheiden sich dadurch, daß die Intensitätskurve an der Stelle $\mathcal{M}$ ($\sin^2\beta/2=1$) beim ersteren ein Maximum, beim letzteren ein Minimum besitzt.

Beim einfachen Phänomen gilt also:

$$J_{\sin^2\beta/2 < 1} < J_{\sin^2\beta/2 = 1}$$

Beim verdoppelten Phänomen läßt sich stets ein β derart finden, daß:

$$J_{\sin^2\beta/2 < 1} > J_{\sin^2\beta/2 = 1} \quad \text{wird.}$$

δ_{sp} ist derjenige Wert von δ, für welchen diese Ungleichung in eine Gleichung übergeht (einer der beiden sich ergebenden Werte). Dieser Weg wurde von Schulz bei der Berechnung der Formel 4.):

4.) $$\operatorname{tg}\delta_{sp} = C \cdot \rho_{\perp}/\rho_{\parallel} \operatorname{ctg}\alpha$$

im Falle $\Delta = 0, \pm\pi$ etc. eingeschlagen.

2.) Beim einfachen Phänomen besitzt die Intensitätskurve [1]) nur eine einzige Stelle, deren Richtung der Abszissenachse parallel liegt ($\mathcal{M}$), beim verdoppelten Phänomen drei solcher Stellen ($\mathcal{M}$, m_1 m_2). Man bilde also den Ausdruck $\frac{\partial J}{\partial \beta}$ und setze ihn gleich 0. Existieren 3 reelle Lösungen der Gleichung:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = 0,$$

[1]) Gemeint ist immer nur der Teil zwischen I und II.

so hat man es mit dem verdoppelten Phänomen, existiert nur eine, so hat man es mit dem einfachen Phänomen zu tun. δ_{sp} ist einer der beiden Werte von δ, für welche 2 von den 3 Lösungen gerade imaginär werden.

3.) Beim einfachen Phänomen kehrt die Intensitätskurve an der Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ ihre konkave Seite der Abszissenachse zu, beim verdoppelten Phänomen ihre konvexe Seite. Im ersten Falle ist daher:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}_{(\sin^2 \beta/2 = 1)} < 0,$$

im zweiten Falle:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}_{(\sin^2 \beta/2 = 1)} > 0$$

δ_{sp} ist einer der beiden Werte von δ, für welche:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}_{(\sin^2 \beta/2 = 1)} = 0$$

wird. Unter J ist stets der Ausdruck 6.) (p. 21) verstanden, also:

$$\begin{aligned} J = {} & M_{\perp}^2 (A_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) + M_{\parallel}^2 (A_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2) \\ & + 2 M_{\perp} M_{\parallel} [\cos \Delta (A_{\perp} A_{\parallel} + B_{\perp} B_{\parallel}) \\ & - \sin \Delta (A_{\perp} B_{\parallel} - B_{\perp} A_{\parallel})] \end{aligned}$$

Von diesen 3 Wegen zur Lösung des Problems mußte der erste von vornherein wegen der Unübersichtlichkeit des Ausdrucks 6.) ausgeschlossen werden. Die beiden andern erfordern zunächst die Bildung von $\frac{\partial J}{\partial \beta}$. Bei der Differentiation soll $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ konstant gehalten werden (auch Fig. 3 war unter der Annahme der Konstanz von $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ gezeichnet)[1]). Trotzdem ist die Ausrechnung noch sehr langwierig und der Ausdruck, den man schließlich für $\frac{\partial J}{\partial \beta}$ erhält, sehr kompliziert. Er vereinfacht sich aber wesentlich, wenn man ihn für die Stelle $\sin^2 \beta/2 = 1$ spezialisiert und lautet dann:

---

[1]) In Wirklichkeit ist auch $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ implicite von β abhängig, da beide mit dem Abstande von der Grenze der Totalreflexion variieren.

12.) $\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)_{\sin^2 \beta/2 = 1} = \frac{2\rho_\perp \rho_{\prime\prime} \sigma_\perp \sigma_{\prime\prime} (\sigma_\perp{}^2 - \sigma_{\prime\prime}{}^2) \sin 2\alpha \cdot \sin 2\delta \cdot \sin \Delta}{(1+\sigma_\perp{}^2)^2 (1+\sigma_{\prime\prime}{}^2)^2}$

Berechnet man endlich $\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}\right)_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ und setzt dies gleich Null, so ergibt sich daraus für δ die Beziehung:

13.) $\operatorname{tg} \delta = - \frac{\rho_\perp \operatorname{ctg} \alpha \sigma_\perp [a \cos \Delta \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \Delta - b^2}]}{\rho_{\prime\prime} \cdot \sigma_{\prime\prime} (1 - \sigma_{\prime\prime}{}^2)^2 (1 + \sigma_\perp{}^2)^4}$

wo a und b komplizierte Funktionen von $\sigma_\perp$, $\sigma_{\prime\prime}$ sind mit positivem Vorzeichen. Die beiden aus 13.) folgenden Werte von δ, entsprechend dem positiven oder negativen Vorzeichen der Wurzel sollen die Grenzen des Verdopplungsgebiets, einer von ihnen also das δ_{sp} sein.

Noch ehe ich aber daranging, die Gültigkeit des Ausdrucks 13.) zu prüfen, gab schon der Ausdruck 12.) zu einer wichtigen Überlegung Anlaß. Derselbe gibt die Neigung eines Elementes der Intensitätskurve bei $\sin^2 \beta/2 = 1$ an und besagt folgendes:

Die Tangente an die Intensitätskurve bei $\sin^2 \beta/2 = 1$ verläuft nur dann parallel zur Abszissenachse, wenn $\Delta = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ etc. ist; sonst ($\Delta \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi$ etc.) bildet sie im allgemeinen einen schiefen Winkel mit ihr, oder anders ausgedrückt:

Bei linear polarisiertem Lichte verläuft die Intensitätskurve stets symmetrisch zur Mittelordinate in $\mathcal{M}$ (Fig. 3), bei elliptisch polarisiertem Lichte im allgemeinen unsymmetrisch, also ganz anders als bei linear polarisiertem Lichte.[1]) Die Unsymmetrie der Intensitätskurve bei elliptisch polarisiertem Lichte kam bei Schulz noch nicht zum Ausdruck.

---

[1]) Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, daß die Intensitätskurve auch bei linear polarisiertem Lichte unsymmetrisch wird, sobald man $\sigma_\perp$, $\sigma_{\prime\prime}$ nicht mehr als konstant ansieht. Das kommt hier nicht in Betracht, weil eben $\sigma_\perp$, $\sigma_{\prime\prime}$ bei der Rechnung konstant gehalten wurde (vgl. die Bemerkung bei Schulz l. c. p. 5). Übrigens erscheint das richtige Verhältnis der Intensitäten in praxi schon deshalb verzerrt, weil die Stelle $\sin^2 \beta/2 = 1$ nicht genau in der Mitte zwischen den Hauptstreifen liegt (vgl. p. 35).

Gleichzeitig ergibt sich aber, daß die unter Nr. 1 und 2 gegebenen Formulierungen von δ_{sp} versagen; denn beide setzen die Symmetrie der Intensitätskurve voraus.

Es bleibt noch die dritte, etwas allgemeiner gehaltene übrig, welche zur Formel 13.) führte; denn die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}\right)_{\sin^2 \beta/2 = 1} = 0$$

beim Übergang von Konvexität in Konkavität kann auch dann noch gelten, wenn $\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ einen endlichen Wert besitzt.

Ob aber die Formel 13.) wirklich die Lage des Verdoppelungssprunges wiedergibt, läßt sich nicht eher entscheiden, als bis man einen Einblick in die durch die Unsymmetrie geschaffenen Krümmungsverhältnisse der Intensitätskurve gewonnen hat. Z. B. muß die Formel 13.) ihre Bedeutung notwendig verlieren, wenn sich der Übergang aus Konvexität in Konkavität nicht mehr bei $\sin^2 \beta/2 = 1$, sondern an einer anderen Stelle zwischen den Hauptstreifen vollzieht.

Um zu erfahren, wie sich die ganze Erscheinung bei Anwesenheit einer Phasendifferenz $\triangle$ theoretisch abspielt, wurde zur Durchführung eines zahlenmäßigen Beispiels gegriffen.

Es wurde die Intensität J im Verlauf zwischen 2 Hauptstreifen des Phänomens nach der allgemeinen Formel 6.) berechnet und zwar unter Zugrundelegung der Werte:

$\rho_\perp = \rho_\parallel = 1$, $\alpha = 45^0$, $\sigma_\perp = -0{,}4853$, $\sigma_\parallel = -0{,}7392$,
und $\triangle = -\pi/2$

für 12 verschiedene Analysatorstellungen:

$\delta = 0^0$, 10^0, 30^0, 50^0, 70^0, 90^0, 110^0, 130^0, 140^0, 150^0, 160^0, 170^0.

$\sigma_\perp$ und $\sigma_\parallel$ sind so gewählt, daß der Ausdruck:

$$\frac{\sigma_\perp \cdot \sigma_\parallel \, (\sigma_\perp^2 - \sigma_\parallel^2)}{(1+\sigma_\perp^2)^2 \, (1+\sigma_\parallel^2)^2}$$

in Formel 12.) seinen größten Wert erreicht. Beim Brechungsquotienten n = 1,52 der Würfelprismen würde dies einem Brechungswinkel r = 80° (Fig. 2) in der Luftschicht entsprechen. Auch die übrigen Größen $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$, α und $\triangle$ sind wie leicht ersichtlich so angenommen, daß $\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ und damit die Unsymmetrie der Intensitätskurve so groß wie möglich wird.

Zum Vergleich wurde auch der symmetrische Intensitätsverlauf für $\triangle = 0$ berechnet. Die gefundenen Intensitäten sind in Tafel 2 und 3 graphisch aufgetragen, die zu $\triangle = -\pi/2$ gehörigen in ausgezogenen, die zu $\triangle = 0$ gehörigen in gestrichelten Kurven. Längs der Abszisse variiert β, von Streifen zu Streifen um 360° (2π)[1]. Betrachten wir zuerst die gestrichelten Kurven ($\triangle = 0$).

Entsprechend den verhältnismäßig kleinen Werten von $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ (dem großen Abstande von der Grenze der Totalreflexion), ist der Abfall zum Minimum nach rechts und links sehr sanft, die Hauptstreifen sind also breit und verwaschen.

Eine Verdopplung wird zuerst bei $\delta = 110°$ schwach sichtbar. Bei $\delta = 140°$ herrscht ungefähr maximale Verdopplung, wobei die Nebenmaxima m m nicht mehr scharf sind, wie in Fig. 3, sondern ebenso verschwommen wie die Hauptminima. Bei $\delta = 160°$ ist man schon wieder außerhalb des Verdopplungsgebietes. Den Verdopplungssprung wird man etwa nach $\delta = 150°$ verlegen. Tatsächlich folgt aus der für $\triangle = 0$ spezialisierten Formel 13.) der eine Wert $\delta = 150° 15'$[2]. Überall aber ist die Intensitätsverteilung streng symmetrisch zur Mittelordinate.

Dagegen sind die ausgezogenen Kurven ($\triangle = -\pi/2$) deutlich unsymmetrisch, und zwar, wie es die Formel 12.)

---

[1] Daß bei $\beta = 0°$ begonnen wird, ist natürlich willkürlich.

[2] Bei obigen Werten von $\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$ nehmen die Konstanten a bezw. b die Größe 2,1288 bezw. 1,2659 an.

verlangt, von $\delta = 0^0$ bis $\delta = 90^0$ nach der einen Seite, von $\delta = 90^0$ bis $\delta = 180^0$ nach der entgegengesetzten Seite geneigt. Nur bei $\delta = 0^0$ (180^0) und 90^0 fallen sie mit den punktierten symmetrischen Kurven zusammen.

Sonderbarerweise fehlt jede Spur einer Verdopplung. Indessen läßt sich dieses Verhalten nach Formel 13.) verstehen. Diese Formel liefert nur dann zwei bestimmte reelle Werte δ_1 und δ_2, wenn der Radikand der Wurzel:

$$\sqrt{a^2\cos^2\triangle - b^2}$$

positiv ist; sie liefert nur einen einzigen reellen Wert, wenn er gleich 0 ist. Letzteres tritt ein, wenn $\cos\triangle = \pm b/a$ wird, oder bei unseren Werten von $\sigma_\perp$, $\sigma_{\prime\prime}$, wenn $\triangle$ etwa $= \pm 0{,}3\,\pi$ wird. Darüber hinaus erhält man keine reellen Werte von δ, also auch keine Verdopplung mehr. In unserem Falle ist aber $\triangle = -0{,}5\,\pi$. Hier begegnet uns zum ersten Male die Tatsache, daß oberhalb einer ganz bestimmten Phasendifferenz $\triangle$ die Verdopplung ausbleibt, und diese Tatsache scheint zunächst indirekt wieder für die Gültigkeit der Formel 13.) zu sprechen.

Nun kam es uns aber gerade darauf an, den Verlauf der Erscheinung beim Vorhandensein einer Verdopplung kennen zu lernen. Dazu bietet das folgende zweite Zahlenbeispiel Gelegenheit, bei welchem $\triangle$, $\sigma_\perp$ u. $\sigma_{\prime\prime}$ gegen früher geändert ist. $\triangle$ beträgt nur $-\pi/6$ und die $\sigma_\perp$, $\sigma_{\prime\prime}$ sind dem Brechungswinkel $r = 89^0\,30'$ entsprechend gewählt ($\sigma_\perp = -0{,}9654$; $\sigma_{\prime\prime} = -0{,}9849$)[1]). Diesmal wurde die Intensitätsverteilung für 6 verschiedene Analysatorstellen berechnet: $\delta = 90^0$, $99^0\,22'$, 100^0, 110^0, $138^0\,48'$, 145^0. Darunter befinden sich die beiden aus Formel 13.) berechneten Werte $\delta_{,} = 99^0\,22'$ und $\delta = 138^0\,48'$, welche eigentlich die Grenzen des Verdopplungsgebietes repräsentieren sollten. Die Intensitäten wurden wieder graphisch aufgetragen in Tafel 4.

Man erkennt zunächst, daß der Abfall zu den Hauptstreifen außerordentlich steil ist, ähnlich wie in Fig. 3 (es

[1]) a und b sind in diesem Falle gleich: 0,0515 bezw. 0,0296.

sind dieselben $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ gewählt). Die Unsymmetrie ist wieder deutlich ausgeprägt. Aber die Krümmungsverhältnisse der Intensitätskurven sind viel komplizierter als in Tafel 2 und 3 und die Verdopplung ist gegenüber Fig. 3 eigentümlich verändert.

$\delta = 99^0\,22'$ kann man allenfalls noch als Übergangsstellung vom einfachen ins verdoppelte Phänomen ansehen; bei $\delta = 138^0\,48'$ trifft das sicher nicht mehr zu. Auch jetzt noch ist $\delta = 138^0\,48'$ zweifellos von den benachbarten Stellungen des Analysators mathematisch ausgezeichnet, indem der zweite Differentialquotient $\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}\right)_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ bei dieser Analysatorstellung gerade gleich 0 ist; offenbar besitzt die Intensitätskurve bei $\sin^2 \beta/2 = 1$ einen Wendepunkt. Aber das nützt uns nichts, denn diese Analysatorstellung fällt mitten in das „Verdopplungsgebiet" hinein (wenn man diese Bezeichnung noch anwenden darf) und hat physikalisch keine besondere Bedeutung mehr. Damit scheitert auch die dritte Formulierung an der Kompliziertheit des Phänomens. Man könnte höchstens noch versuchen, den allgemeinen Ausdruck $\frac{\partial J}{\partial \beta}$ oder auch $\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2}$ für verschiedene β von 0 bis 2π und für verschiedene δ einzeln zu diskutieren, um die Lage des Verdopplungssprunges auf diesem Wege zu ermitteln. Aber auch das scheint bei der Unübersichtlichkeit der betreffenden Ausdrücke so gut wie aussichtslos.

Deshalb wurde von weiteren Versuchen, δ_{sp} als Funktion von Δ, $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ darzustellen, Abstand genommen. Damit fällt zwar die Möglichkeit, Δ mit Hilfe des Verdopplungssprunges zu bestimmen, fort. Trotzdem aber waren die Betrachtungen dieses Abschnittes nicht vergeblich. Denn sie gaben den Anstoß und bildeten die Grundlage zu einer Reihe von neuen Untersuchungen, die auf ganz anderem Wege schließlich doch zu einer neuen Methode der Phasendifferenzmessung führten.

Der Kern dieser Untersuchungen liegt in der Verwertung der Unsymmetrie zur Bestimmung von Δ und als Kriterium für die Elliptizität des Lichtes überhaupt.

Es sind uns bis jetzt zwei wesentliche Unterschiede der Erscheinung bei linear polarisiertem und bei elliptisch polarisiertem Lichte begegnet.

Der erste bezog sich allein auf die Intensität an der Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ und auf den Wechsel dieser Intensität beim Drehen des Analysators; er besagte, daß an dieser einen Stelle im Falle $\triangle = 0$[1]) das Phänomen bei einer bestimmten Analysatorstellung einmal absolut dunkel wird, im Falle $\triangle \neq 0$[1]) dagegen nicht.

Der zweite, eben dargelegte Unterschied bezog sich auf die Art der Intensitätsverteilung zwischen zwei Hauptminimis und sagte aus, daß diese Verteilung im Falle $\triangle = 0$ stets symmetrisch, im Falle $\triangle \neq 0$ im allgemeinen unsymmetrisch zur Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ ausgebildet ist.

Im Grunde genommen ist der erste Unterschied aber schon im zweiten enthalten. Denn schon aus der Tatsache, daß das Kurvenelement an der Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ gegen die Abszissenachse geneigt ist, folgt mit Notwendigkeit, daß an dieser Stelle nie die Intensität 0 herrschen darf[2]).

Ebenso folgt ganz allgemein, daß an dieser Stelle nie mehr ein Minimum der Intensitätskurve, weder ein absolutes noch ein relatives, liegen darf. Wenn also im Falle $\triangle \neq 0$ überhaupt noch ein Zwischenminimum zur Ausbildung kommt, so muß es verschoben sein.

Nun sieht man in der Tat auf Tafel 4 ein solches Zwischenminimum entstehen und zwar dicht bei dem einen Hauptstreifen II ($\beta = 360^0$). Man kann daher in Analogie mit den früheren Benennungen (p. 13) auch dieses Minimum als „Verdopplungsstreifen" bezeichnen und bei der Analysatorstellung δ_0 (etwa gleich 145° in Tafel 4), wo es absolut dunkel wird, von einer „max. Verdopplung" sprechen.

---

[1]) So mögen die beiden Hauptfälle jetzt der Kürze halber unterschieden werden.

[2]) Ausgenommen sind natürlich die beiden Konstellationen $\alpha = 0^0$, $\delta = 90^0$ und $\alpha = 90^0$, $\delta = 0^0$, wo das ganze Phänomen gleichmäßig ausgelöscht wird (vgl. pag. 13 und pag. 15).

In dieser erweiterten Bezeichnungsweise erleidet der gesperrt gedruckte Satz auf p. 18 eine Einschränkung und ist dahin abzuändern:

Sobald $\triangle$ von 0 etc. verschieden ist, gibt es zwar unter Umständen noch eine maximale Verdopplung, aber der Verdopplungsstreifen liegt an einer anderen Stelle, er wandert.

Schon nach dem Ausdruck 12.) (p. 42), welcher als Maß der Unsymmetrie aufzufassen ist, kann man vermuten, daß diese Wanderung ganz allmählich erfolgt, indem der Verdopplungsstreifen nacheinander alle möglichen Lagen von $\beta = 180^0$ bis in die Nähe von II annimmt, wenn man $\triangle$ allmählich von 0 bis $-\pi/6$ wachsen läßt. Auch muß man erwarten, daß die Wanderung in der entgegengesetzten Richtung erfolgt, wenn die Phasendifferenz ihr Vorzeichen wechselt.

Denn der Faktor $\sin \triangle$ in $\left(\frac{\partial J}{\partial \beta}\right)_{\sin^2\beta/2=1}$ bedeutet ja einmal, daß die Unsymmetrie ganz allmählich zunimmt mit wachsender Phasendifferenz und zweitens, daß die Intensitätskurve ihre Einseitigkeit zugleich mit dem Vorzeichenwechsel von $\triangle$ umkehrt.

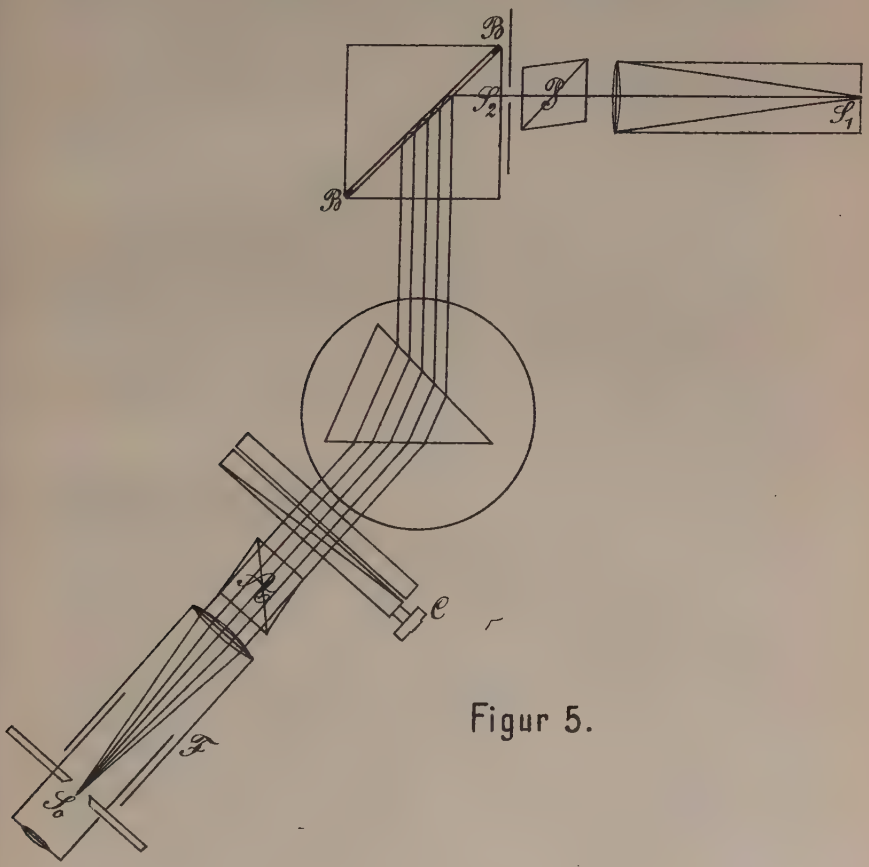
Da sich das scharf ausgeprägte Zwischenminimum in Tafel 4 auch dem Aussehen nach von dem breiten flachen Zwischenminimum der Fig. 3 beträchtlich unterscheidet, so muß man annehmen, daß sich während der Wanderung auch die Schärfe des Verdopplungsstreifens ändert. Alle diese Vermutungen werden durch das Experiment bestätigt.

§ 4.

Die Wanderung des Verdopplungsstreifens.

Die hier benützte Versuchsanordnung ist etwas einfacher als die im ersten Hauptteil (p. 30 ff.) beschriebene. Es fallen alle die Teile fort, die zur Erzeugung und Fortleitung des Vergleichslichtes dienten, also die Prismen P_1, P_2, P_3, die Linsen L_4, L_5 und die beiden Nicols N_1, N_2. (Fig. 4.) Der Okularspalt wird zunächst weiter gebraucht.

Der veränderte Aufbau ist in Fig. 5 dargestellt. Diesmal wurde der Interferenzwürfel und das Kollimatorrohr mit dem Polarisator besonders montiert, während der Tisch des Spektrometers zur Aufnahme von Prismen, reflektierenden Flächen u. dergl. frei blieb. Diese Anordnung



Figur 5.

gestattet das Phänomen sowohl direkt zu betrachten, indem man die aus dem Würfel austretenden Strahlen direkt auffängt, als indirekt, indem man sie etwa durch ein Prisma ablenkt (Fig. 5) oder an einer Fläche reflektieren läßt.

Der Winkel der Schwingungsrichtung des Polarisators mit der Hauptebene betrug stets 45°. Die Bestimmung des Nullpunktes von Polarisator und Analysator und die Justierung des Soleil-Babinetschen Kompensators C wurde in der p. 33 angegebenen Weise ausgeführt.

Das Phänomen soll direkt betrachtet werden und zwar der Teil zwischen dem ersten und zweiten Herschelschen Streifen I und II, die Streifen selbst mit eingerechnet. (Wie man diese Streifen leicht ins Gesichtsfeld bekommt, ist p. 32, 33 beschrieben.) Der Okularspalt sei weit geöffnet, so daß das Gesichtsfeld rechts und links nur durch die Ränder des Kollimatorspaltes (d. h. durch das Abbild desselben in der Brennebene des Fernrohrs F) begrenzt wird. Der Kompensator stehe genau auf $\triangle = 0$, der Analysator auf maximaler Verdopplung.

Sobald man jetzt am Kompensator ein wenig verstellt, wird der Verdopplungsstreifen beweglich, während die Hauptstreifen feststehen bleiben. Schraubt man z. B. im Sinne positiver Phasendifferenzen, so wandert der Verdopplungsstreifen in der Richtung auf I zu, bei negativen Phasendifferenzen bewegt er sich nach II; gleichzeitig wird er schmäler und schärfer, sowie er seinen Platz an der Stelle $\beta = 3\pi$ verläßt. Er bleibt auch dann noch absolut dunkel, solange man nicht über $\triangle = \pm \pi/_{10}$ etwa hinausgeht. Später muß man den Analysator etwas nachdrehen, um ihn auf größte Dunkelheit (auf max. Verdopplung) zu bringen. Auch bewegt sich der Verdopplungsstreifen dann immer langsamer. Schließlich bleibt er in der Gegend von $\triangle = \pm \pi/4$ in unmittelbarer Nähe der Hauptstreifen ganz stehen und verblaßt allmählich, ohne daß man dies durch Drehung des Analysators verhindern könnte.

Ebenso wie in der Umgebung von $\triangle = 0$ verhält sich das Phänomen in der Umgebung von $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$ etc. Aber auch in der Nähe von $\pm \pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ zeigt sich die gleiche Erscheinung, nur daß die Winkel δ_0, welche im ersten Falle zur maximalen Verdopplung gehörten, jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, so daß

die Schwingungsrichtung des Analysators auf die andere Seite der Hauptebene zu liegen kommt.

Geht man also von der Phasendifferenz $\triangle = 0$ aus und verstellt den Kompensator stets im Sinne positiv wachsender Phasendifferenzen, wobei man den Verdopplungsstreifen mit Hilfe des Analysators immer auf absoluter Dunkelheit (maximaler Verdopplung) zu erhalten sucht, so beobachtet man folgendes.

Der Verdopplungsstreifen rückt aus seiner „Ruhelage" zuerst sehr schnell, dann langsam nach I, macht in unmittelbarer Nähe von I Halt und verblaßt etwa bei $\triangle = + \pi/4$. Es folgt ein Gebiet der Phasendifferenzen wo keine maximale Verdopplung und endlich überhaupt keine Verdopplung mehr existiert (vgl. Tafel 2 und 3). Erst bei $\pm 3\pi/4$ etwa taucht der Verdopplungsstreifen wieder auf, diesmal unmittelbar bei II, wird wieder absolut dunkel und wandert zuerst langsam, dann sehr schnell in die Ruhelage zurück. Inzwischen ist die Schwingungsrichtung des Analysators auf die andere Seite der Hauptebene gelangt. Von hier ab wiederholt sich das Spiel, bis bei $\triangle = 2\pi$ der Verdopplungsstreifen wieder in die Ruhelage und der Analysator in die alte Stellung zurückkehrt.

Erzeugt man negativ wachsende Phasendifferenzen, so erfolgt die Wanderung im umgekehrten Sinne, in der Richtung von I nach II, im übrigen ganz ähnlich.

Bisher hatten wir immer angenommen, daß das vom Würfel kommende Licht streng linear polarisiert ist. In Wirklichkeit ist das nicht der Fall, sondern die beiden Hauptkomponenten jedes Strahles erhalten schon bei der Reflexion an der Luftschicht im Interferenzwürfel, an welcher sie dicht vor der Grenze der Totalreflexion, aber noch im Gebiete der gewöhnlichen Reflexion gespiegelt werden, eine Phasendifferenz $\triangle = -\pi + \varepsilon$, wo ε allerdings außerordentlich klein ist. Wie zu erwarten, macht sich diese geringe Elliptizität dadurch geltend, daß der Verdopplungsstreifen, auch wenn der Kompensator auf 0

steht oder wenn man den Kompensator überhaupt fortnimmt, nicht genau an der Stelle $\beta = 3\pi$, sondern etwas mehr nach dem Hauptstreifen I zu liegt. Betrachtet man nur den Raum zwischen I und II, so fällt dies nicht auf, weil die Stelle $\beta = 3\pi$ (aus dem p. 35 angeführten Grunde) ohnehin nicht genau in der Mitte zwischen I und II liegt. Es wird erst bemerkbar, wenn man einen größeren Teil des Phänomens gleichzeitig überblickt. Praktisch ist es später gleichgültig, ob man die Wanderung des Streifens von jener etwas abweichenden Ruhelage ausgehen läßt oder von der Stelle $\beta = 3\pi$ selbst. Wo aber dieser Umstand besonders berücksichtigt werden muß, wird noch darauf hingewiesen werden[1]).

Aus den Betrachtungen auf p. 51 ging hervor, daß sich der Verdopplungsstreifen in der Nähe der Ruhelage am schnellsten bewegt, daß also einer sehr geringen Phasendifferenz Δ schon eine relativ große Verschiebung aus der Ruhelage entspricht. Das legt den Gedanken nahe, eben diese Verschiebung des Verdopplungsstreifens als Kriterium für sehr geringe Elliptizitäten des Lichtes zu benützen. Wie empfindlich dieses Kriterium ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Zwar ist der Verdopplungsstreifen gerade in der Nähe der Ruhelage breit und verschwommen (Fig. 3). Aber wir hatten schon in § 2 (p. 35) kennen gelernt, daß man dieser Schwierigkeit durch geeignete Verwendung des Okularspaltes S_0 abhelfen kann. Dadurch wird die Beobachtung einer sehr kleinen Verschiebung des Verdoppelungsstreifens durch den Okularspalt wesentlich erleichtert.

Benützt man das genannte Kriterium zunächst einmal zur Eichung des Kompensators, so kann man es auf seine Empfindlichkeit unmittelbar prüfen. Der Kompensator

---

[1]) Danach verlangen auch die beobachteten Intensitätsschwankungen auf p. 36 eine kleine Korrektion, weil die Intensitäten nicht genau an der Stelle $\sin^2\beta|_2 = 1$ gemessen wurden. Ob dieselbe schon genügen würde, um die Abweichung der beiden Kurven in Tafel I zu beseitigen, läßt sich nicht übersehen.

zeigt offenbar dann die Phasendifferenz 0 oder $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ etc. an, wenn der Verdopplungsstreifen durch ihn hindurchgesehen genau an derselben Stelle zwischen den Hauptstreifen I und II erscheint, wie ceteris paribus ohne Kompensator betrachtet. Demnach ist die Eichung folgendermaßen vorzunehmen:

1.) Der Kompensator wird entfernt, der Analysator auf maximale Verdopplung gestellt und der Verdopplungsstreifen mit Hilfe des Okularspaltes unter gleichzeitiger Drehung des Fernrohrs F soweit eingeengt, daß er genau symmetrisch zwischen die Spalträndern zu liegen kommt . . (vergl. p. 35).

2.) Darauf hält man den Okularspalt und das Fernrohr F fest, bringt den Kompensator ein, justiert ihn (vergl. p. 33) und schraubt an der Trommel so lange, bis der Verdopplungsstreifen wiederum genau symmetrisch zwischen den Spalträndern liegt. Das tritt ein bei der Phasendifferenz $\triangle = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc.[1]). Zur Kontrolle kann man auch noch den Analysator auf die andere Seite der Hauptebene drehen und erhält dann die zu $\triangle = \pm \pi$, $\pm 3\pi$ etc. gehörigen Trommelzahlen.

Bei der Einstellung des Verdopplungsstreifens achtet man am besten darauf, daß die hellen Einfassungen rechts und links gleich breit erscheinen. Dann erzielt man schon nach kurzer Übung eine große Genauigkeit. So konstatierte ich bei 10 Einstellungen mit dem Kompensator als größte Abweichung vom Mittel (in Wellenlängen ausgedrückt) nur 0,0007 λ. Die Phasendifferenz $\triangle = \pm 0{,}001\ \lambda$ oder $\pm\ 0{,}002\ \pi$ war noch direkt an der Verschiebung des Verdopplungsstreifens zu erkennen[2]).

---

[1]) Welche von den Trommelstellungen der Phasendifferenz 0 entspricht, läßt sich nur durch Versuche mit weißem Lichte entscheiden.

[2]) In Wirklichkeit ist das Kriterium wahrscheinlich genauer, denn die enge Öffnung des Kompensators läßt nur wenige von den Strahlen s_1, s_2, s_3 etc. (Fig. 2) hindurch, so daß das Phänomen an Deutlichkeit verliert.

Führt man also zwischen Interferenzwürfel und Kompensator einen Gegenstand ein, welcher eine beliebige Phasendifferenz Δ erzeugt (etwa eine planparallele, parallel zur Achse geschnittene doppelt brechende Krystallplatte), und mißt die Phasendifferenz, indem man sie durch den Kompensator künstlich auf 0 reduziert, so ist diese Messung schon bei einer einzigen Einstellung bis auf $\pm \lambda/1000$ richtig. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß der Nullpunkt des Kompensators absolut genau bestimmt ist. Damit aber die Fehler der Nullpunktbestimmung nicht größer sind als die Fehler der Messung müssen zur Festlegung des Nullpunktes mindestens doppelt so viel Einstellungen ohne Kompensator mit dem Okularspalt[1]) (1, p. 53) und doppelt so viel Einstellungen an der Kompensatortrommel (2, p. 53) gemacht werden als Trommeleinstellungen zur Messung der Phasendifferenz. Denn derselbe Fehler, mit welchem die Messung der Phasendifferenz behaftet ist, tritt bei der Nullpunktbestimmung zweimal auf, im Stadium 1 und im Stadium 2, und kann sich daher im ungünstigsten Falle verdoppeln.

Ehe das gewonnene Kriterium praktisch benützt werden kann, bedürfen die experimentell gefundenen Tatsachen noch einer theoretischen Ergänzung.

Der Kompensator, in den Strahlengang zwischen Würfel und Analysator gebracht und richtig justiert, bewirkt zwar außer einer bestimmten Phasendifferenz zwischen den Hauptkomponenten jedes Strahls auch eine Änderung ihrer Amplituden. Aber beide Komponenten werden beim Durchtritt im gleichen Verhältnis geschwächt ($\rho_\perp = \rho_\parallel = \rho$ vgl. p. 28). Daher kann diese Schwächung auf den Charakter der Erscheinung, die Lage des Verdopplungsstreifens, die zur maximalen Verdopplung gehörige Analysatorstellung etc. keinen Einfluß haben. Praktisch liegt aber die Sache im allgemeinen so, daß gleichzeitig mit der Phasendifferenz eine ungleiche Schwächung der

[1]) Um die Verschiebung des Okularspaltes messen zu können, sind die letzten feinen Einstellungen im Stadium 1 nur durch Drehung des Fernrohres F um die Achse des Spektrometers zu bewerkstelligen.

beiden Hauptkomponenten verbunden ist, z. B. wenn man das Phänomen an einer Glasfläche im Brewster'schen Gebiet reflektieren läßt. Diese ungleiche Schwächung der Hauptkomponenten soll im folgenden stets verstanden werden, wenn von Amplitudenänderungen überhaupt die Rede ist.

Es fragt sich, ob bei Anwesenheit solcher Amplitudenänderungen die Wanderung des Verdopplungsstreifens unter dem Einfluß der Phasendifferenz noch genau so vor sich geht, als wenn nur Phasendifferenzen vorhanden sind.

Zunächst steht soviel fest, daß im Falle $\triangle = 0$ Amplitudenänderungen allein keine Verschiebung des Streifens bewirken können. Denn es ist schon früher dargelegt worden, daß die $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ nur eine Aufhellung des Streifens bewirken, welche sich durch Drehung des Analysators wieder rückgängig machen läßt (p. 16). Tritt also eine Verschiebung des Streifens aus der „Ruhelage" ein, so kann nur die Phasendifferenz allein oder gleichzeitig mit Amplitudenänderungen daran schuld sein, d. h.: Die Verschiebung des Verdopplungsstreifens aus der Ruhelage ($\sin^2\beta/2 = 1$) ist ein eindeutiges Kriterium für das Vorhandensein einer Phasendifferenz $\triangle$.

Damit ist aber noch nicht erwiesen, ob der Streifen, einmal aus der Ruhelage entfernt, auch weiterhin nur durch Änderung der Phasendifferenz oder auch durch Amplitudenänderung verschoben wird. Das muß unbedingt klargestellt werden. Denn, wie wir wissen, befindet sich der Verdopplungsstreifen von Anfang an gar nicht in der Ruhelage; wir haben es von vornherein mit einer kleinen unkompensierten Phasendifferenz zu tun, derzufolge der Verdopplungsstreifen etwas auf den Hauptstreifen I zu verschoben erscheint (vgl. p. 51).

Einzelne Beobachtungen, bei welchen Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen gleichzeitig ins Spiel kommen, z. B. bei der Reflexion des Phänomens an einer Glasfläche unter verschiedenen Einfallswinkeln, können

über diese Fragen keinen allgemein gültigen Aufschluß geben.

Hier muß die Theorie einsetzen, deren Aufgabe es ist, zu jedem beliebigen Werte von $\Delta, \rho_\perp$ und $\rho_{''}$ die Lage β_0 des Verdopplungsstreifens zwischen zwei Hauptstreifen sowie auch die zur maximalen Verdopplung (zur absoluten Dunkelheit des Verdopplungsstreifens) notwendige Analysatorstellung δ_0 zu ermitteln.

Vorausgreifend sei bemerkt, daß es mit Hilfe der Theorie gelingt, den folgenden wichtigen Satz zu beweisen:

Die Lage des Verdopplungsstreifens β_0 zwischen zwei bestimmten Hauptstreifen bei maximaler Verdopplung, hängt, solange überhaupt eine maximale Verdopplung existiert, einzig und allein von der Phasendifferenz Δ, die Analysatorstellung δ_0 dagegen bei jeder Lage des Streifens von den Amplitudenänderungen $\rho_\perp$, $\rho_{''}$ und dem Azimut α des Polarisators ab.

§ 5.

Theorie der neuen Methode.

Die Lage des Verdopplungsstreifens wird durch denjenigen Wert β_0 von β zwischen 2 Hauptstreifen, z. B. zwischen $\beta = 2\pi$ (I) und $\beta = 4\pi$ (II) repräsentiert, für welchen die Intensität J gleich 0 wird. Da dies immer nur bei einer einzigen ganz bestimmten Analysatorstellung δ_0 stattfinden kann, und die Intensität bei den unmittelbar benachbarten Stellungen des Analysators schon wieder einen endlichen Betrag haben muß, so berechnet sich β_0 aus den beiden Gleichungen:

a) $J = 0$ und

b) $\frac{\partial J}{\partial \delta} = 0$

J und $\frac{\partial J}{\partial \delta}$ hängt außer von den bekannten Größen $\sigma_\perp$, $\sigma_{''}$, α von β, Δ, $\rho_\perp$, $\rho_{''}$ ab. Gleichung b) nach δ aufgelöst gibt ein δ_{min} (δ_{max}). Das ist die Analysatorstellung

bei welcher die Intensität an irgend einer Stelle β zwischen zwei Hauptstreifen und bei irgend welchen Werten von Δ, $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ ein Minimum (Maximum) besitzt.

Setzt man δ_{min} (δ_{max}) in die linke Seite von a) ein, so ergibt sich die Größe des Minimums (Maximums) an jeder Stelle β als Funktion von Δ, $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$. Setzt man alsdann den Ausdruck für das Minimum gleich 0, so erhält man für jede Stelle β eine Beziehung zwischen Δ und $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$, welche gelten muß, damit an dieser Stelle die minimale Intensität Null beträgt, d. h. damit an dieser Stelle der Verdopplungsstreifen liegt.

In der Rechnung wird sich zeigen daß $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ ganz herausfällt; dann erhält man also zu jeder Lage des Verdopplungsstreifens direkt das zugehörige Δ.

Somit ist der allgemeine Gang der Rechnung gekennzeichnet. Die wirkliche Ausrechnung gestaltet sich folgendermaßen:

Nach 6.) war:

$$\mathbf{J} = M_\perp^2 (A_\perp^2 + B_\perp^2) + M_\parallel^2 (A_\parallel^2 + B_\parallel^2) +$$
$$2 M_\perp M_\parallel [\cos\Delta (A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel) - \sin\Delta (A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel)].$$

Aus: $$\frac{\partial J}{\partial \delta} = \frac{\partial J}{\partial M_\perp} \cdot \frac{\partial M_\perp}{\partial \delta} + \frac{\partial J}{\partial M_\parallel} \cdot \frac{\partial M_\parallel}{\partial \delta}$$

ergibt sich in ganz ähnlicher Weise wie bei der Rechnung auf p. 22, wo es sich nur um den speziellen Ausdruck $J_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ handelte:

14.)

$$\operatorname{tg} 2\delta_{\substack{max \\ min}} = \frac{\rho_\perp \rho_\parallel \sin 2\alpha \{\cos\Delta (A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel) - \sin\Delta (A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel)\}}{\cos^2\alpha \cdot \rho_\perp^2 (A_\perp^2 + B_\perp^2) - \sin^2\alpha \rho_\parallel^2 (A_\parallel^2 + B_\parallel^2)}$$

Auch weiter ist die Rechnung ähnlich. Man formt den Ausdruck 6.) mit Hilfe der damals angegebenen trigonometrischen Relationen so weit um, daß δ nur noch in der Form tg 2δ vorkommt und setzt dann 14.) ein Daraus ergibt sich:

$$J_{\substack{\max\\\min}} = \frac{1}{2}\Big\{\rho_\perp^2\cos^2\alpha\,(A_\perp^2+B_\perp^2) + \rho_\parallel^2\sin^2\alpha\,(A_\parallel^2+B_\parallel^2)$$
$$\pm \sqrt{[\rho_\perp^2\cos^2\alpha(A_\perp^2+B_\perp^2)+\rho_\parallel^2\sin^2\alpha(A_\parallel^2+B_\parallel^2)]^2}$$
$$+ \rho_\perp^2\,\rho_\parallel^2\,\sin^2 2\alpha\,[\cos\triangle\,(A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel)$$
$$- \sin\triangle\cdot(A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel)]^2\Big\}$$

Hierbei bezieht sich das Minuszeichen auf das Minimum.

Setzt man J_{min} gleich 0, so wird:

15.) $$[\cos\triangle\,(A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel) - \sin\triangle\,(A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel)]^2$$
$$-(A_\perp^2+B_\perp^2)\,(A_\parallel^2+B_\parallel^2) = 0$$

In dieser Beziehung zwischen $\triangle$, β_0 und $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ (denn $A_\perp$, $A_\parallel$, $B_\perp$, $B_\parallel$ sind Funktionen von β, $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, und β bedeutet hier bereits die Lage des Verdopplungssprunges β_0) ist $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ und α nicht mehr enthalten. Da bisher in der Rechnung noch keinerlei Vernachlässigungen gemacht wurden, auch $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ z. B. noch ruhig als variabel betrachtet werden kann (wobei dann β_0 implicite auch in $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ vorkommt), so folgt in aller Strenge, daß die Lage des Verdopplungsstreifens gänzlich unabhängig ist von $\rho_\perp$ $\rho_\parallel$ und α und allein abhängig von $\triangle$.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Gleichung 15.) nach einer der beiden Größen $\triangle$ oder β_0 aufzulösen. Am einfachsten geschieht das nach $\triangle$.

Berücksichtigt man, daß

$$A_\perp^2 + B_\perp^2 = \frac{4\,\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2}{(1-\sigma_\perp^2)^2+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2}$$

$$A_\parallel^2 + B_\parallel^2 = \frac{4\,\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2}{(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\,\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2}$$

$$A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel = 4\sigma_\perp\sigma_\parallel\sin^2\beta_0/2$$
$$\cdot\frac{(1-\sigma_\perp^2)\,(1-\sigma_\parallel^2)+2\,(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2}{[(1-\sigma_\perp^2)^2+4\,\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\,\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]}$$

$$A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel = 4\,\sigma_\perp\sigma_\parallel\sin^2\beta_0/2$$
$$\cdot\frac{\sin\beta_0\,(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)}{[(1-\sigma_\perp^2)^2+4\,\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\,\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]}$$

ist (siehe die Werte von $A_\perp$, $A_\parallel$, $B_\perp$, $B_\parallel$ auf p. 14) und kürzt durch $\sin^2\beta_0/2$, da $\sin^2\beta_0/2 = 0$ doch nur wieder auf die Hauptstreifen hinausführt, so erhält man:

15a.) $\left[\cos\triangle\left((1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2\right)\right.$
$\left.-\sin\triangle\sin\beta_0(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)\right]^2-[(1-\sigma_\perp^2)^2$
$+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]=0.$

Die beiden Ausdrücke

$[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]^2$ und

$[(1-\sigma_\perp^2)^2+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]$

sind gleich für $\sin^2\beta_0/2=0$ und für $\sin^2\beta_0/2=1$; dazwischen, für $\sin^2\beta_0/2=1/2$ beträgt ihre Differenz nur $(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)^2$, was bei Beobachtung dicht an der Grenze der Totalreflexion ($r=89^0\,30'$ vgl. p. 45) kleiner ist als 0,0016. Das ist aber klein gegenüber dem absoluten Wert dieser Ausdrücke, welcher sich, wenn $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ nahezu 1 wird, der 4 nähert. Man kann also die beiden Ausdrücke praktisch gleich setzen. Dann läßt sich aber 15a.) in der Form schreiben ($1-\cos^2\triangle=\sin^2\triangle$):

$\sin^2\triangle\{[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]^2$
$-\sin^2\beta_0(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)^2\}+2\cos\triangle\sin\triangle\,[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)$
$+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]\sin\beta_0(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)=0$

so erhält man schließlich:

16.)
$$\operatorname{tg}\triangle=2\cdot\frac{[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]\sin\beta_0(\sigma_\parallel^2-\sigma_\perp^2)}{[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]^2-\sin^2\beta_0(\sigma_\parallel^2-\sigma_\perp^2)^2}$$

und, wenn man diesen Ausdruck in 14.) einsetzt:

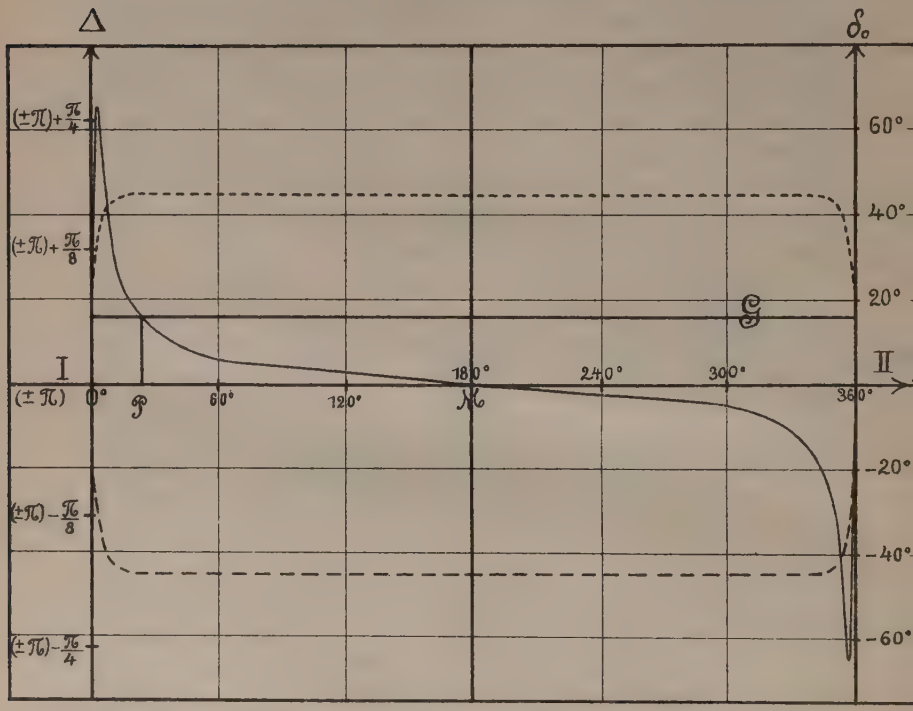
17.)
$$\operatorname{tg}2\delta_0=\mp\frac{\rho_\perp\rho_\parallel\sigma_\perp\sigma_\parallel\sin2\alpha\,[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]}{\rho_\perp^2\sigma_\perp^2\cos^2\alpha\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]-\rho_\parallel^2\sigma_\parallel^2\sin^2\alpha\,[(1-\sigma_\perp^2)^2+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]}$$

wo das $+$ Zeichen zu nehmen ist, wenn sich $\triangle$ in der Nähe von 0, das $-$ Zeichen, wenn es sich in der Nähe von $\mp\pi$ bewegt.

In den Formeln 16.) und 17.) ist alles, was zur Wanderung des Verdopplungsstreifens gehört, enthalten. Formel 16.) liefert zu jeder Lage β_0 des Verdopplungsstreifens die entsprechende Phasendifferenz $\triangle$, Formel 17.) die zur maximalen Verdopplung bei der Lage β_0 notwendige Analysatorstellung δ_0. Da der tg $\triangle$ periodisch ist mit der Periode π, so liegt der Verdopplungsstreifen

immer in Abständen von einer halben Wellenlänge ($= \pi$) Phasendifferenz wieder an der derselben Stelle β_0 (vgl. p. 50).

Im Gegensatz zu Formel 16.) enthält 17.) auch die Größen $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ α; δ_0 hängt also von der Polarisatorstellung und von den Amplitudenänderungen ab. Aus 17.) ergeben



Figur 6.

sich zunächst bei bestimmten Vorzeichen immer zwei um 90° verschiedene Werte von δ, von denen nur der eine der maximalen Verdopplung entspricht, der andere aber dem Maximum der Intensität. Der erste, das eigentliche δ_0, läßt sich leicht dadurch vom zweiten unterscheiden, daß er bei $\sin^2\beta/2 = 1$ oder $\Delta = 0$ (in der Ruhelage des

Streifens) und bei positiven Werten von $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben muß als α (auf der anderen Seite der Hauptebene liegen muß als der Polarisatorwinkel). Denn bei $\sin^2\beta/2 = 1$ kommt für die Auslöschung nach den Erörterungen des § 2 nur im wesentlichen ein einziger Strahl (s_1, Fig. 2) in Betracht.

Um die Formeln 16.) und 17.) mit den Beobachtungen des § 4 besser vergleichen zu können, wurde nach ihnen Δ und δ_0 für verschiedene β_0 zwischen zwei Hauptstreifen (symbolisch zwischen $\beta_0 = 0^0$ und $\beta_0 = 360^0$) berechnet, δ_0 unter der speziellen Annahme: $\rho_\perp = \rho_\parallel = 1$, $\alpha = 45^0$. $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ sind konstant angenommen und zwar, entsprechend r (Fig. 2) $= 89^0\,30'$ zu: $\sigma_\perp = -0{,}9654$; $\sigma_\parallel = -0{,}9849$ (vgl. p. 45). Die erhaltenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

β_0 in Winkelgraden	Δ in π	δ_0 in Winkelgraden	β_0 in Winkelgraden	Δ in π	δ_0 in Winkelgraden
0^0	$0{,}0000\,(\pm\pi)$	$-(+)\,23{,}41^0$	$360^0 - 0^0$	$-0{,}0000\,(\pm\pi)$	$-(+)\,23{,}41^0$
$2^0\,39'$	$0{,}2584$ „	„ „ $32{,}41^0$	„ $2^0\,39'$	$-0{,}2584$ „	„ „ $32{,}41^0$
4^0	$0{,}2404$ „	„ „ $36{,}98^0$	„ 4^0	$-0{,}2401$ „	„ „ $36{,}98^0$
10^0	$0{,}1232$ „	„ „ $43{,}23^0$	„ 10^0	$-0{,}1232$ „	„ „ $43{,}23^0$
20^0	$0{,}0704$ „	„ „ $44{,}53^0$	„ 20^0	$-0{,}0704$ „	„ „ $44{,}53^0$
40^0	$0{,}0348$ „	„ „ $44{,}88^0$	„ 40^0	$-0{,}0348$ „	„ „ $44{,}88^0$
60^0	$0{,}0220$ „	„ „ $44{,}95^0$	„ 60^0	$-0{,}0220$ „	„ „ $44{,}95^0$
80^0	$0{,}0152$ „	„ „ $44{,}97^0$	„ 80^0	$-0{,}0152$ „	„ „ $44{,}97^0$
100^0	$0{,}0108$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 100^0	$-0{,}0108$ „	„ „ $44{,}98^0$
120^0	$0{,}0072$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 120^0	$-0{,}0072$ „	„ „ $44{,}98^0$
140^0	$0{,}0048$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 140^0	$-0{,}0048$ „	„ „ $44{,}98^0$
160^0	$0{,}0024$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 160^0	$-0{,}0024$ „	„ „ $44{,}98^0$
180^0	$0{,}0000$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 180^0	$-0{,}0000$ „	„ „ $44{,}98^0$

und in Figur 6 graphisch aufgetragen. Längs der Abszisse variiert β_0, längs der Ordinate Δ (ausgezogene Kurve) und δ_0 (gestrichelte bezw. punktierte Kurve).

Der Periodizität gemäß müßte die △-Kurve eigentlich im Abstande + und — π nochmals gezeichnet werden (wenn man sich auf den Zwischenraum zwischen ± 2 π beschränkt). Um das zu vermeiden, ist den Zahlen der △-Achse einfach das ± π in Klammern hinzugefügt. — Die untere (gestrichelte) δ_0-Kurve bezieht sich dann auf die in der Figur gezeichnete, die obere (punktierte) auf die in Abständen ± π hinzugedachte △-Kurve.

Man bekommt eine anschauliche Vorstellung von der Wanderung des Verdopplungsstreifens, wenn man eine Parallele G zur Abszissenachse von unten nach oben oder umgekehrt über die Zeichnung streichen läßt und immer die Projektion P des Schnittpunktes mit der △-Kurve auf der Abszisse ins Auge faßt. Der Punkt P gibt direkt die Lage des Verdopplungsstreifens, und die entsprechende Ordinate der δ_0-Kurve das zugehörige δ_0 an.

Sehr deutlich erkennt man, daß sich der Verdopplungsstreifen in der Nähe von $\mathcal{M}$ ($\sin^2 \beta/2 = 1$) am schnellsten, in der Nähe der Hauptstreifen I und II am langsamsten bewegen muß (vgl. p. 51).

Da die △-Kurve unmittelbar vor den Hauptstreifen nochmals zur Abszisse umbiegt, so schneidet jede Parallele G diese Kurve in 2 Punkten. Das heißt, zu jeder Phasendifferenz △ gehören streng genommen 2 Lagen des Verdopplungsstreifens, P und P′. Indessen liegt P′ so nahe an den Hauptstreifen, daß es praktisch mit ihnen verschmilzt. Ein Blick auf die δ_0-Kurve lehrt übrigens, daß P′ bei einer ganz anderen Analysatorstellung auftritt, oder, besser gesagt, maximal sichtbar wird als P und schon deshalb bei der Beobachtung von P nicht stören kann.

Aus der Tabelle und Figur 6.) erkennt man auch, daß eine maximale Verdopplung nur etwa zwischen + π/4 und — π/4 existieren kann. Denn darüber hinaus schneidet die Parallele G die △-Kurve überhaupt nicht mehr. Die Grenzen dieses Gebiets der maximalen Verdopplung sind

rechnerisch ganz exakt zu ermitteln; denn sie werden durch die Umbiegungsstellen der Δ-Kurve in der Nähe von I und II bestimmt. Dieselben wurden durch Differentiation des Ausdrucks 16.) nach β_0 zu:

$$\beta_0 = 2^0\,39', \ (360^0 - 2^0\,39'),$$
$$\Delta = 0{,}2584 \text{ bezw. } -0{,}2584$$

festgestellt. Praktisch sind diese Grenzen, welche natürlich von $\sigma_\perp$, $\sigma_{''}$ abhängen, nicht so scharf zu erkennen, weil der Verdopplungsstreifen auch dann noch, wenn die maximale Verdopplung schon aufgehört hat, zu sehen ist; er verblaßt ganz allmählich (vgl. p. 51).

Die große Empfindlichkeit bei der Einstellung des Verdopplungsstreifens zwischen die Spaltränder (vgl. p. 53) kann nicht mehr überraschen. Entspricht doch, wie aus der Tabelle und Figur 6.) zu entnehmen ist, einer Phasendifferenz $\pm$ 0,001 λ oder 0,002 π schon eine Verschiebung aus der Ruhelage um etwa 17° (in β_0), also um etwa den 10. Teil des Abstandes $\mathcal{M}$I oder $\mathcal{M}$II. Beträgt der Absand I, II 20 Winkelminuten (wie bei den Versuchen des § 4), so bedeutet das eine Verschiebung des Streifens um etwa eine Winkelminute, die eben noch wahrzunehmen ist.

Es liegt nahe, den Abstand I, II möglichst weit zu machen, um die absolute Verschiebung des Streifens zu vergrößern. Bei meiner Anordnung ließ sich das nicht ausführen, da die Luftschicht zwischen den Würfelprismen nur bei einer gewissen Dicke gut planparalell gemacht werden konnte. Aber selbst wenn man die Luftschicht noch dünner macht, so daß die Hauptstreifen noch weiter auseinander rücken, wird sich die Empfindlichkeit des Kriteriums kaum erhöhen lassen. Denn dadurch wird auch der Verdopplungsstreifen breiter und verwaschener, als er sonst schon ist. Sollte es allerdings gelingen, eine Anordnung zu finden, bei welcher der Verdopplungsstreifen an und für sich viel schärfer ist, etwa so scharf wie die Hauptstreifen, so wäre eine wesentliche Steigerung der Empfindlichkeit zu erwarten.

§ 6.

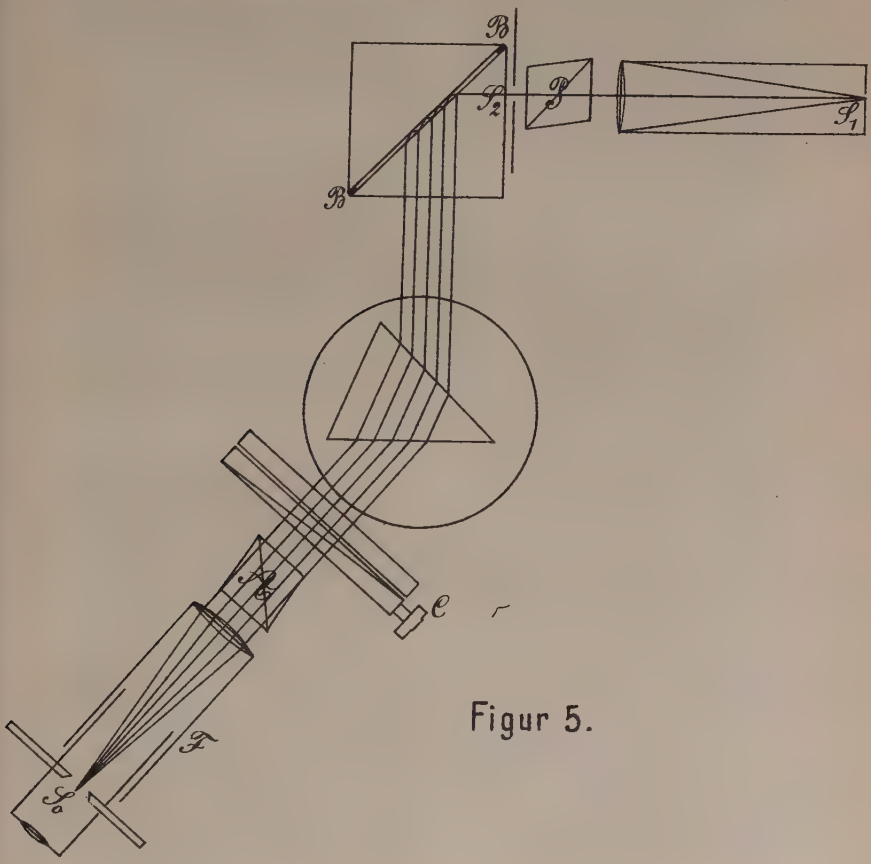
Anwendungen der Methode.

1. Messung einer beliebigen Phasendifferenz mit dem Kompensator.

Eine beliebige Phasendifferenz Δ wird gemessen, indem man den Verdopplungsstreifen durch Drehung der Kompensatortrommel zwischen die Ränder des Okularspaltes zurückführt und die Phasendifferenz direkt am Kompensator abliest.

Bei reflektierenden Flächen handelt es sich darum, das direkte Phänomen mit dem indirekten zu vergleichen. Hier erhebt sich eine Schwierigkeit: Hat man den Okularspalt am direkten Phänomen so eingestellt, daß er den Verdopplungsstreifen symmetrisch einfaßt, und dadurch eine bestimmte Lage zu den Hauptstreifen I und II einnimmt, so muß er genau dieselbe Lage den Hauptstreifen gegenüber auch im indirekten Phänomen erhalten, damit eine relative Verschiebung des Verdopplungsstreifens sichtbar wird. Das ist aber ohne weitere Hilfsmittel nicht zu erreichen, da man die Erscheinung beim Einbringen der reflektierenden Fläche zunächst ganz aus dem Auge verliert und erst durch Drehung des Fernrohres wieder aufsuchen muß. Man umgeht diese Schwierigkeit, wenn man statt des Okularspaltes den Kollimatorspalt benützt. Da der Kollimatorspalt, wie oben p. 32 erwähnt, das Gesichtsfeld rechts und links begrenzt, so kann man den Verdopplungsstreifen durch Verengern des Kollimatorspalts unter gleichzeitiger Drehung des Interferenzwürfels genau so einfassen, wie durch den Okularspalt. Jedoch behalten die Ränder des Kollimatorspaltes ihre Lage gegenüber den Hauptstreifen auch nach der Reflexion von selbst genau bei. Ein Nachteil ist allerdings, daß die Erscheinung infolge störender Reflexionen im Innern der Würfelprismen auch rechts und links von den Rändern

Der veränderte Aufbau ist in Fig. 5 dargestellt. Diesmal wurde der Interferenzwürfel und das Kollimatorrohr mit dem Polarisator besonders montiert, während der Tisch des Spektrometers zur Aufnahme von Prismen, reflektierenden Flächen u. dergl. frei blieb. Diese Anordnung



Figur 5.

gestattet das Phänomen sowohl direkt zu betrachten, indem man die aus dem Würfel austretenden Strahlen direkt auffängt, als indirekt, indem man sie etwa durch ein Prisma ablenkt (Fig. 5) oder an einer Fläche reflektieren läßt.

Der Winkel der Schwingungsrichtung des Polarisators mit der Hauptebene betrug stets 45°. Die Bestimmung des Nullpunktes von Polarisator und Analysator und die Justierung des Soleil-Babinetschen Kompensators C wurde in der p. 33 angegebenen Weise ausgeführt.

Das Phänomen soll direkt betrachtet werden und zwar der Teil zwischen dem ersten und zweiten Herschelschen Streifen I und II, die Streifen selbst mit eingerechnet. (Wie man diese Streifen leicht ins Gesichtsfeld bekommt, ist p. 32, 33 beschrieben.) Der Okularspalt sei weit geöffnet, so daß das Gesichtsfeld rechts und links nur durch die Ränder des Kollimatorspaltes (d. h. durch das Abbild desselben in der Brennebene des Fernrohrs F) begrenzt wird. Der Kompensator stehe genau auf $\triangle = 0$, der Analysator auf maximaler Verdopplung.

Sobald man jetzt am Kompensator ein wenig verstellt, wird der Verdopplungsstreifen beweglich, während die Hauptstreifen feststehen bleiben. Schraubt man z. B. im Sinne positiver Phasendifferenzen, so wandert der Verdopplungsstreifen in der Richtung auf I zu, bei negativen Phasendifferenzen bewegt er sich nach II; gleichzeitig wird er schmäler und schärfer, sowie er seinen Platz an der Stelle $\beta = 3\pi$ verläßt. Er bleibt auch dann noch absolut dunkel, solange man nicht über $\triangle = \pm \pi/_{10}$ etwa hinausgeht. Später muß man den Analysator etwas nachdrehen, um ihn auf größte Dunkelheit (auf max. Verdopplung) zu bringen. Auch bewegt sich der Verdopplungsstreifen dann immer langsamer. Schließlich bleibt er in der Gegend von $\triangle = \pm \pi/4$ in unmittelbarer Nähe der Hauptstreifen ganz stehen und verblaßt allmählich, ohne daß man dies durch Drehung des Analysators verhindern könnte.

Ebenso wie in der Umgebung von $\triangle = 0$ verhält sich das Phänomen in der Umgebung von $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$ etc. Aber auch in der Nähe von $\pm \pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ zeigt sich die gleiche Erscheinung, nur daß die Winkel δ_0, welche im ersten Falle zur maximalen Verdopplung gehörten, jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, so daß

die Schwingungsrichtung des Analysators auf die andere Seite der Hauptebene zu liegen kommt.

Geht man also von der Phasendifferenz $\triangle = 0$ aus und verstellt den Kompensator stets im Sinne positiv wachsender Phasendifferenzen, wobei man den Verdopplungsstreifen mit Hilfe des Analysators immer auf absoluter Dunkelheit (maximaler Verdopplung) zu erhalten sucht, so beobachtet man folgendes.

Der Verdopplungsstreifen rückt aus seiner „Ruhelage" zuerst sehr schnell, dann langsam nach I, macht in unmittelbarer Nähe von I Halt und verblaßt etwa bei $\triangle = + \pi/4$. Es folgt ein Gebiet der Phasendifferenzen wo keine maximale Verdopplung und endlich überhaupt keine Verdopplung mehr existiert (vgl. Tafel 2 und 3). Erst bei $\pm 3\pi/4$ etwa taucht der Verdopplungsstreifen wieder auf, diesmal unmittelbar bei II, wird wieder absolut dunkel und wandert zuerst langsam, dann sehr schnell in die Ruhelage zurück. Inzwischen ist die Schwingungsrichtung des Analysators auf die andere Seite der Hauptebene gelangt. Von hier ab wiederholt sich das Spiel, bis bei $\triangle = 2\pi$ der Verdopplungsstreifen wieder in die Ruhelage und der Analysator in die alte Stellung zurückkehrt.

Erzeugt man negativ wachsende Phasendifferenzen, so erfolgt die Wanderung im umgekehrten Sinne, in der Richtung von I nach II, im übrigen ganz ähnlich.

Bisher hatten wir immer angenommen, daß das vom Würfel kommende Licht streng linear polarisiert ist. In Wirklichkeit ist das nicht der Fall, sondern die beiden Hauptkomponenten jedes Strahles erhalten schon bei der Reflexion an der Luftschicht im Interferenzwürfel, an welcher sie dicht vor der Grenze der Totalreflexion, aber noch im Gebiete der gewöhnlichen Reflexion gespiegelt werden, eine Phasendifferenz $\triangle = -\pi + \varepsilon$, wo ε allerdings außerordentlich klein ist. Wie zu erwarten, macht sich diese geringe Elliptizität dadurch geltend, daß der Verdopplungsstreifen, auch wenn der Kompensator auf 0

steht oder wenn man den Kompensator überhaupt fortnimmt, nicht genau an der Stelle $\beta = 3\pi$, sondern etwas mehr nach dem Hauptstreifen I zu liegt. Betrachtet man nur den Raum zwischen I und II, so fällt dies nicht auf, weil die Stelle $\beta = 3\pi$ (aus dem p. 35 angeführten Grunde) ohnehin nicht genau in der Mitte zwischen I und II liegt. Es wird erst bemerkbar, wenn man einen größeren Teil des Phänomens gleichzeitig überblickt. Praktisch ist es später gleichgültig, ob man die Wanderung des Streifens von jener etwas abweichenden Ruhelage ausgehen läßt oder von der Stelle $\beta = 3\pi$ selbst. Wo aber dieser Umstand besonders berücksichtigt werden muß, wird noch darauf hingewiesen werden[1]).

Aus den Betrachtungen auf p. 51 ging hervor, daß sich der Verdopplungsstreifen in der Nähe der Ruhelage am schnellsten bewegt, daß also einer sehr geringen Phasendifferenz $\triangle$ schon eine relativ große Verschiebung aus der Ruhelage entspricht. Das legt den Gedanken nahe, eben diese Verschiebung des Verdopplungsstreifens als Kriterium für sehr geringe Elliptizitäten des Lichtes zu benützen. Wie empfindlich dieses Kriterium ist, soll im folgenden gezeigt werden.

Zwar ist der Verdopplungsstreifen gerade in der Nähe der Ruhelage breit und verschwommen (Fig. 3). Aber wir hatten schon in § 2 (p. 35) kennen gelernt, daß man dieser Schwierigkeit durch geeignete Verwendung des Okularspaltes S_0 abhelfen kann. Dadurch wird die Beobachtung einer sehr kleinen Verschiebung des Verdoppelungsstreifens durch den Okularspalt wesentlich erleichtert.

Benützt man das genannte Kriterium zunächst einmal zur Eichung des Kompensators, so kann man es auf seine Empfindlichkeit unmittelbar prüfen. Der Kompensator

[1]) Danach verlangen auch die beobachteten Intensitätsschwankungen auf p. 36 eine kleine Korrektion, weil die Intensitäten nicht genau an der Stelle $\sin^2\beta/_2 = 1$ gemessen wurden. Ob dieselbe schon genügen würde, um die Abweichung der beiden Kurven in Tafel I zu beseitigen, läßt sich nicht übersehen.

zeigt offenbar dann die Phasendifferenz 0 oder $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ etc. an, wenn der Verdopplungsstreifen durch ihn hindurchgesehen genau an derselben Stelle zwischen den Hauptstreifen I und II erscheint, wie ceteris paribus ohne Kompensator betrachtet. Demnach ist die Eichung folgendermaßen vorzunehmen:

1.) Der Kompensator wird entfernt, der Analysator auf maximale Verdopplung gestellt und der Verdopplungsstreifen mit Hilfe des Okularspaltes unter gleichzeitiger Drehung des Fernrohrs F soweit eingeengt, daß er genau symmetrisch zwischen die Spalträndern zu liegen kommt . . (vergl. p. 35).

2.) Darauf hält man den Okularspalt und das Fernrohr F fest, bringt den Kompensator ein, justiert ihn (vergl. p. 33) und schraubt an der Trommel so lange, bis der Verdopplungsstreifen wiederum genau symmetrisch zwischen den Spalträndern liegt. Das tritt ein bei der Phasendifferenz $\triangle = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ etc.[1]). Zur Kontrolle kann man auch noch den Analysator auf die andere Seite der Hauptebene drehen und erhält dann die zu $\triangle = \pm\pi$, $\pm 3\pi$ etc. gehörigen Trommelzahlen.

Bei der Einstellung des Verdopplungsstreifens achtet man am besten darauf, daß die hellen Einfassungen rechts und links gleich breit erscheinen. Dann erzielt man schon nach kurzer Übung eine große Genauigkeit. So konstatierte ich bei 10 Einstellungen mit dem Kompensator als größte Abweichung vom Mittel (in Wellenlängen ausgedrückt) nur 0,0007 λ. Die Phasendifferenz $\triangle = \pm 0{,}001\ \lambda$ oder $\pm\ 0{,}002\ \pi$ war noch direkt an der Verschiebung des Verdopplungsstreifens zu erkennen[2]).

---

[1]) Welche von den Trommelstellungen der Phasendifferenz 0 entspricht, läßt sich nur durch Versuche mit weißem Lichte entscheiden.

[2]) In Wirklichkeit ist das Kriterium wahrscheinlich genauer, denn die enge Öffnung des Kompensators läßt nur wenige von den Strahlen s_1, s_2, s_3 etc. (Fig. 2) hindurch, so daß das Phänomen an Deutlichkeit verliert.

Führt man also zwischen Interferenzwürfel und Kompensator einen Gegenstand ein, welcher eine beliebige Phasendifferenz Δ erzeugt (etwa eine planparallele, parallel zur Achse geschnittene doppelt brechende Krystallplatte), und mißt die Phasendifferenz, indem man sie durch den Kompensator künstlich auf 0 reduziert, so ist diese Messung schon bei einer einzigen Einstellung bis auf $\pm \lambda/_{1000}$ richtig. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß der Nullpunkt des Kompensators absolut genau bestimmt ist. Damit aber die Fehler der Nullpunktbestimmung nicht größer sind als die Fehler der Messung müssen zur Festlegung des Nullpunktes mindestens doppelt so viel Einstellungen ohne Kompensator mit dem Okularspalt[1]) (1, p. 53) und doppelt so viel Einstellungen an der Kompensatortrommel (2, p. 53) gemacht werden als Trommeleinstellungen zur Messung der Phasendifferenz. Denn derselbe Fehler, mit welchem die Messung der Phasendifferenz behaftet ist, tritt bei der Nullpunktbestimmung zweimal auf, im Stadium 1 und im Stadium 2, und kann sich daher im ungünstigsten Falle verdoppeln.

Ehe das gewonnene Kriterium praktisch benützt werden kann, bedürfen die experimentell gefundenen Tatsachen noch einer theoretischen Ergänzung.

Der Kompensator, in den Strahlengang zwischen Würfel und Analysator gebracht und richtig justiert, bewirkt zwar außer einer bestimmten Phasendifferenz zwischen den Hauptkomponenten jedes Strahls auch eine Änderung ihrer Amplituden. Aber beide Komponenten werden beim Durchtritt im gleichen Verhältnis geschwächt ($\rho_\perp = \rho_\parallel = \rho$ vgl. p. 28). Daher kann diese Schwächung auf den Charakter der Erscheinung, die Lage des Verdopplungsstreifens, die zur maximalen Verdopplung gehörige Analysatorstellung etc. keinen Einfluß haben. Praktisch liegt aber die Sache im allgemeinen so, daß gleichzeitig mit der Phasendifferenz eine ungleiche Schwächung der

[1]) Um die Verschiebung des Okularspaltes messen zu können, sind die letzten feinen Einstellungen im Stadium 1 nur durch Drehung des Fernrohres F um die Achse des Spektrometers zu bewerkstelligen.

beiden Hauptkomponenten verbunden ist, z. B. wenn man das Phänomen an einer Glasfläche im Brewster'schen Gebiet reflektieren läßt. Diese ungleiche Schwächung der Hauptkomponenten soll im folgenden stets verstanden werden, wenn von Amplitudenänderungen überhaupt die Rede ist.

Es fragt sich, ob bei Anwesenheit solcher Amplitudenänderungen die Wanderung des Verdopplungsstreifens unter dem Einfluß der Phasendifferenz noch genau so vor sich geht, als wenn nur Phasendifferenzen vorhanden sind.

Zunächst steht soviel fest, daß im Falle $\triangle = 0$ Amplitudenänderungen allein keine Verschiebung des Streifens bewirken können. Denn es ist schon früher dargelegt worden, daß die $\rho_{\perp}$, $\rho_{\parallel}$ nur eine Aufhellung des Streifens bewirken, welche sich durch Drehung des Analysators wieder rückgängig machen läßt (p. 16). Tritt also eine Verschiebung des Streifens aus der „Ruhelage" ein, so kann nur die Phasendifferenz allein oder gleichzeitig mit Amplitudenänderungen daran schuld sein, d. h.: Die Verschiebung des Verdopplungsstreifens aus der Ruhelage ($\sin^2\beta/2 = 1$) ist ein eindeutiges Kriterium für das Vorhandensein einer Phasendifferenz $\neq \triangle$.

Damit ist aber noch nicht erwiesen, ob der Streifen, einmal aus der Ruhelage entfernt, auch weiterhin nur durch Änderung der Phasendifferenz oder auch durch Amplitudenänderung verschoben wird. Das muß unbedingt klargestellt werden. Denn, wie wir wissen, befindet sich der Verdopplungsstreifen von Anfang an gar nicht in der Ruhelage; wir haben es von vornherein mit einer kleinen unkompensierten Phasendifferenz zu tun, derzufolge der Verdopplungsstreifen etwas auf den Hauptstreifen I zu verschoben erscheint (vgl. p. 51).

Einzelne Beobachtungen, bei welchen Amplitudenänderungen und Phasendifferenzen gleichzeitig ins Spiel kommen, z. B. bei der Reflexion des Phänomens an einer Glasfläche unter verschiedenen Einfallswinkeln, können

über diese Fragen keinen allgemein gültigen Aufschluß geben.

Hier muß die Theorie einsetzen, deren Aufgabe es ist, zu jedem beliebigen Werte von $\triangle$, $\rho_\perp$ und $\rho_\parallel$ die Lage β_0 des Verdopplungsstreifens zwischen zwei Hauptstreifen sowie auch die zur maximalen Verdopplung (zur absoluten Dunkelheit des Verdopplungsstreifens) notwendige Analysatorstellung δ_0 zu ermitteln.

Vorausgreifend sei bemerkt, daß es mit Hilfe der Theorie gelingt, den folgenden wichtigen Satz zu beweisen:

Die Lage des Verdopplungsstreifens β_0 zwischen zwei bestimmten Hauptstreifen bei maximaler Verdopplung, hängt, solange überhaupt eine maximale Verdopplung existiert, einzig und allein von der Phasendifferenz $\triangle$, die Analysatorstellung δ_0 dagegen bei jeder Lage des Streifens von den Amplitudenänderungen $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ und dem Azimut α des Polarisators ab.

§ 5.

Theorie der neuen Methode.

Die Lage des Verdopplungsstreifens wird durch denjenigen Wert β_0 von β zwischen 2 Hauptstreifen, z. B. zwischen $\beta = 2\pi$ (I) und $\beta = 4\pi$ (II) repräsentiert, für welchen die Intensität J gleich 0 wird. Da dies immer nur bei einer einzigen ganz bestimmten Analysatorstellung δ_0 stattfinden kann, und die Intensität bei den unmittelbar benachbarten Stellungen des Analysators schon wieder einen endlichen Betrag haben muß, so berechnet sich β_0 aus den beiden Gleichungen:

a) $J = 0$ und

b) $\frac{\partial J}{\partial \delta} = 0$

J und $\frac{\partial J}{\partial \delta}$ hängt außer von den bekannten Größen $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, α von β, $\triangle$, $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ ab. Gleichung b) nach δ aufgelöst gibt ein δ_{min} (δ_{max}). Das ist die Analysatorstellung

bei welcher die Intensität an irgend einer Stelle β zwischen zwei Hauptstreifen und bei irgend welchen Werten von Δ, $\rho_\perp$, $\rho_{\parallel}$ ein Minimum (Maximum) besitzt.

Setzt man δ_{min} (δ_{max}) in die linke Seite von a) ein, so ergibt sich die Größe des Minimums (Maximums) an jeder Stelle β als Funktion von Δ, $\rho_\perp$, $\rho_{\parallel}$. Setzt man alsdann den Ausdruck für das Minimum gleich 0, so erhält man für jede Stelle β eine Beziehung zwischen Δ und $\rho_\perp$, $\rho_{\parallel}$, welche gelten muß, damit an dieser Stelle die minimale Intensität Null beträgt, d. h. damit an dieser Stelle der Verdopplungsstreifen liegt.

In der Rechnung wird sich zeigen daß $\rho_\perp$, $\rho_{\parallel}$ ganz herausfällt; dann erhält man also zu jeder Lage des Verdopplungsstreifens direkt das zugehörige Δ.

Somit ist der allgemeine Gang der Rechnung gekennzeichnet. Die wirkliche Ausrechnung gestaltet sich folgendermaßen:

Nach 6.) war:

$$J = M_\perp^2 (A_\perp^2 + B_\perp^2) + M_{\parallel}^2 (A_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2) +$$
$$2 M_\perp M_{\parallel} [\cos\Delta (A_\perp A_{\parallel} + B_\perp B_{\parallel}) - \sin\Delta (A_\perp B_{\parallel} - B_\perp A_{\parallel})].$$

Aus: $\frac{\partial J}{\partial \delta} = \frac{\partial J}{\partial M_\perp} \cdot \frac{\partial M_\perp}{\partial \delta} + \frac{\partial J}{\partial M_{\parallel}} \cdot \frac{\partial M_{\parallel}}{\partial \delta}$

ergibt sich in ganz ähnlicher Weise wie bei der Rechnung auf p. 22, wo es sich nur um den speziellen Ausdruck $J_{\sin^2 \beta/2 = 1}$ handelte:

14.)

$$\operatorname{tg} 2\delta_{\substack{max \\ min}} = \frac{\rho_\perp \rho_{\parallel} \sin 2\alpha \{\cos\Delta (A_\perp A_{\parallel} + B_\perp B_{\parallel}) - \sin\Delta (A_\perp B_{\parallel} - B_\perp A_{\parallel})\}}{\cos^2\alpha \cdot \rho_\perp^2 (A_\perp^2 + B_\perp^2) - \sin^2\alpha \, \rho_{\parallel}^2 (A_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2)}$$

Auch weiter ist die Rechnung ähnlich. Man formt den Ausdruck 6.) mit Hilfe der damals angegebenen trigonometrischen Relationen so weit um, daß δ nur noch in der Form tg 2δ vorkommt und setzt dann 14.) ein Daraus ergibt sich:

$$J_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{1}{2}\Big\{\rho_\perp^2 \cos^2\alpha\,(A_\perp^2 + B_\perp^2) + \rho_\parallel^2 \sin^2\alpha\,(A_\parallel^2 + B_\parallel^2)$$
$$\pm \sqrt{[\rho_\perp^2 \cos^2\alpha (A_\perp^2 + B_\perp^2) + \rho_\parallel^2 \sin^2\alpha (A_\parallel^2 + B_\parallel^2)]^2}$$
$$+ \rho_\perp^2 \rho_\parallel^2 \sin^2 2\alpha\,[\cos\triangle\,(A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel)$$
$$- \sin\triangle \cdot (A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel)]^2\Big\}$$

Hierbei bezieht sich das Minuszeichen auf das Minimum.

Setzt man J_{min} gleich 0, so wird:

15.) $$[\cos\triangle\,(A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel) - \sin\triangle\,(A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel)]^2$$
$$- (A_\perp^2 + B_\perp^2)\,(A_\parallel^2 + B_\parallel^2) = 0$$

In dieser Beziehung zwischen $\triangle$, β_0 und $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ (denn $A_\perp$, $A_\parallel$, $B_\perp$, $B_\parallel$ sind Funktionen von β, $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$, und β bedeutet hier bereits die Lage des Verdopplungssprunges β_0) ist $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ und α nicht mehr enthalten. Da bisher in der Rechnung noch keinerlei Vernachlässigungen gemacht wurden, auch $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ z. B. noch ruhig als variabel betrachtet werden kann (wobei dann β_0 implicite auch in $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ vorkommt), so folgt in aller Strenge, daß die Lage des Verdopplungsstreifens gänzlich unabhängig ist von $\rho_\perp$ $\rho_\parallel$ und α und allein abhängig von $\triangle$.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Gleichung 15.) nach einer der beiden Größen $\triangle$ oder β_0 aufzulösen. Am einfachsten geschieht das nach $\triangle$.

Berücksichtigt man, daß

$$A_\perp^2 + B_\perp^2 = \frac{4\sigma_\perp^2 \sin^2\beta_0/2}{(1-\sigma_\perp^2)^2 + 4\sigma_\perp^2 \sin^2\beta_0/2}$$

$$A_\parallel^2 + B_\parallel^2 = \frac{4\sigma_\parallel^2 \sin^2\beta_0/2}{(1-\sigma_\parallel^2)^2 + 4\sigma_\parallel^2 \sin^2\beta_0/2}$$

$$A_\perp A_\parallel + B_\perp B_\parallel = 4\sigma_\perp\sigma_\parallel \sin^2\beta_0/2$$
$$\cdot \frac{(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2) + 2(\sigma_\perp^2 + \sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2}{[(1-\sigma_\perp^2)^2 + 4\sigma_\perp^2 \sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2 + 4\sigma_\parallel^2 \sin^2\beta_0/2]}$$

$$A_\perp B_\parallel - B_\perp A_\parallel = 4\sigma_\perp\sigma_\parallel \sin^2\beta_0/2$$
$$\cdot \frac{\sin\beta_0\,(\sigma_\perp^2 - \sigma_\parallel^2)}{[(1-\sigma_\perp^2)^2 + 4\sigma_\perp^2 \sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2 + 4\sigma_\parallel^2 \sin^2\beta_0/2]}$$

ist (siehe die Werte von $A_\perp$, $A_\parallel$, $B_\perp$, $B_\parallel$ auf p. 14) und kürzt durch $\sin^2\beta_0/2$, da $\sin^2\beta_0/2 = 0$ doch nur wieder auf die Hauptstreifen hinausführt, so erhält man:

15a.) $\left[\cos\Delta\left((1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2\right)\right.$
$\left.-\sin\Delta\sin\beta_0(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)\right]^2-[(1-\sigma_\perp^2)^2$
$+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]=0.$

Die beiden Ausdrücke

$[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]^2$ und

$[(1-\sigma_\perp^2)^2+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]$

sind gleich für $\sin^2\beta_0/2=0$ und für $\sin^2\beta_0/2=1$; dazwischen, für $\sin^2\beta_0/2=1/2$ beträgt ihre Differenz nur $(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)^2$, was bei Beobachtung dicht an der Grenze der Totalreflexion ($r=89^0\,30'$ vgl. p. 45) kleiner ist als 0,0016. Das ist aber klein gegenüber dem absoluten Wert dieser Ausdrücke, welcher sich, wenn $\sigma_\perp$, $\sigma_\parallel$ nahezu 1 wird, der 4 nähert. Man kann also die beiden Ausdrücke praktisch gleich setzen. Dann läßt sich aber 15a.) in der Form schreiben ($1-\cos^2\Delta=\sin^2\Delta$):

$\sin^2\Delta\{[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]^2$
$-\sin^2\beta_0(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)^2\}+2\cos\Delta\sin\Delta\,[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)$
$+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]\sin\beta_0(\sigma_\perp^2-\sigma_\parallel^2)=0$

so erhält man schließlich:

16.) $$\operatorname{tg}\Delta=2\cdot\frac{[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]\sin\beta_0(\sigma_\parallel^2-\sigma_\perp^2)}{[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]^2-\sin^2\beta_0(\sigma_\parallel^2-\sigma_\perp^2)^2}$$

und, wenn man diesen Ausdruck in 14.) einsetzt:

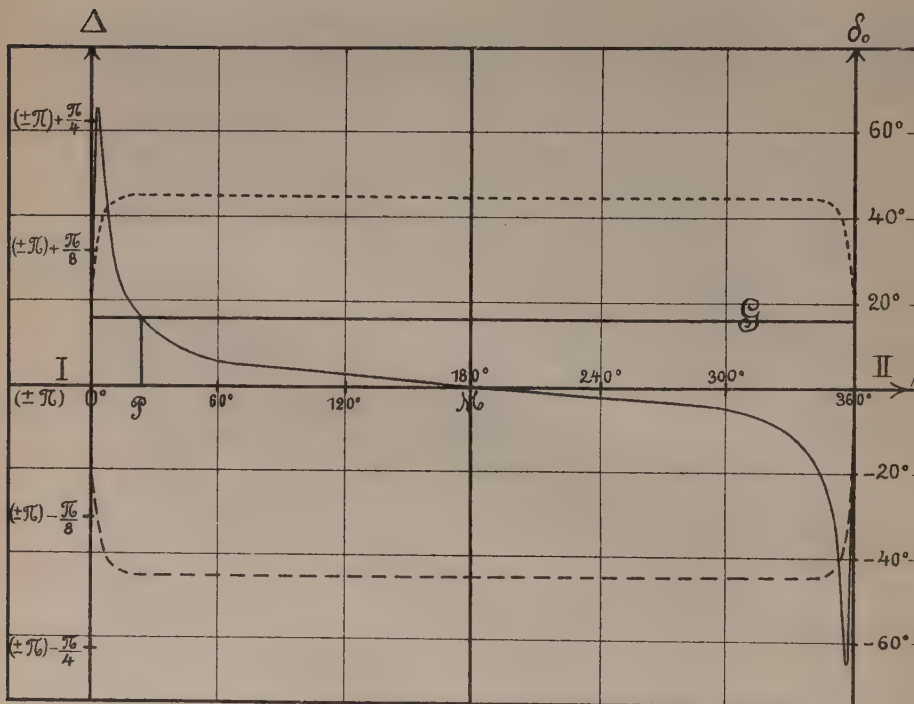
17.) $$\operatorname{tg}2\delta_0=\pm\frac{\rho_\perp\rho_\parallel\sigma_\perp\sigma_\parallel\sin2\alpha\,[(1-\sigma_\perp^2)(1-\sigma_\parallel^2)+2(\sigma_\perp^2+\sigma_\parallel^2)\sin^2\beta_0/2]}{\rho_\perp^2\sigma_\perp^2\cos^2\alpha\,[(1-\sigma_\parallel^2)^2+4\sigma_\parallel^2\sin^2\beta_0/2]-\rho_\parallel^2\sigma_\parallel^2\sin^2\alpha\,[(1-\sigma_\perp^2)^2+4\sigma_\perp^2\sin^2\beta_0/2]}$$

wo das $+$ Zeichen zu nehmen ist, wenn sich Δ in der Nähe von 0, das $-$ Zeichen, wenn es sich in der Nähe von $\pm\pi$ bewegt.

In den Formeln 16.) und 17.) ist alles, was zur Wanderung des Verdopplungsstreifens gehört, enthalten. Formel 16.) liefert zu jeder Lage β_0 des Verdopplungsstreifens die entsprechende Phasendifferenz Δ, Formel 17.) die zur maximalen Verdopplung bei der Lage β_0 notwendige Analysatorstellung δ_0. Da der tg Δ periodisch ist mit der Periode π, so liegt der Verdopplungsstreifen

immer in Abständen von einer halben Wellenlänge ($= \pi$) Phasendifferenz wieder an der derselben Stelle β_0 (vgl. p. 50).

Im Gegensatz zu Formel 16.) enthält 17.) auch die Größen $\rho_\perp$, $\rho_{//}$ α; δ_0 hängt also von der Polarisatorstellung und von den Amplitudenänderungen ab. Aus 17.) ergeben



Figur 6.

sich zunächst bei bestimmten Vorzeichen immer zwei um 90^0 verschiedene Werte von δ, von denen nur der eine der maximalen Verdopplung entspricht, der andere aber dem Maximum der Intensität. Der erste, das eigentliche δ_0, läßt sich leicht dadurch vom zweiten unterscheiden, daß er bei $\sin^2\beta/2 = 1$ oder $\Delta = 0$ (in der Ruhelage des

Streifens) und bei positiven Werten von $\rho_\perp$, $\rho_{\parallel}$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben muß als α (auf der anderen Seite der Hauptebene liegen muß als der Polarisatorwinkel). Denn bei $\sin^2\beta/2 = 1$ kommt für die Auslöschung nach den Erörterungen des § 2 nur im wesentlichen ein einziger Strahl (s_1, Fig. 2) in Betracht.

Um die Formeln 16.) und 17.) mit den Beobachtungen des § 4 besser vergleichen zu können, wurde nach ihnen Δ und δ_0 für verschiedene β_0 zwischen zwei Hauptstreifen (symbolisch zwischen $\beta_0 = 0^0$ und $\beta_0 = 360^0$) berechnet, δ_0 unter der speziellen Annahme: $\rho_\perp = \rho_{\parallel} = 1$, $\alpha = 45^0$. $\sigma_\perp$, $\sigma_{\parallel}$ sind konstant angenommen und zwar, entsprechend r (Fig. 2) $= 89^0 30'$ zu: $\sigma_\perp = -0{,}9654$; $\sigma_{\parallel} = -0{,}9849$ (vgl. p. 45). Die erhaltenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

β_0 in Winkelgraden	Δ in π	δ_0 in Winkelgraden	β_0 in Winkelgraden	Δ in π	δ_0 in Winkelgraden
0^0	$0{,}0000 (\pm\pi)$	$-(+)\ 23{,}41^0$	$360^0 - 0^0$	$-0{,}0000 (\pm\pi)$	$-(+)\ 23{,}41^0$
$2^0\ 39'$	$0{,}2584$ „	„ „ $32{,}41^0$	„ $2^0\ 39'$	$-0{,}2584$ „	„ „ $32{,}41^0$
4^0	$0{,}2404$ „	„ „ $36{,}98^0$	„ 4^0	$-0{,}2401$ „	„ „ $36{,}98^0$
10^0	$0{,}1232$ „	„ „ $43{,}23^0$	„ 10^0	$-0{,}1232$ „	„ „ $43{,}23^0$
20^0	$0{,}0704$ „	„ „ $44{,}53^0$	„ 20^0	$-0{,}0704$ „	„ „ $44{,}53^0$
40^0	$0{,}0348$ „	„ „ $44{,}88^0$	„ 40^0	$-0{,}0348$ „	„ „ $44{,}88^0$
60^0	$0{,}0220$ „	„ „ $44{,}95^0$	„ 60^0	$-0{,}0220$ „	„ „ $44{,}95^0$
80^0	$0{,}0152$ „	„ „ $44{,}97^0$	„ 80^0	$-0{,}0152$ „	„ „ $44{,}97^0$
100^0	$0{,}0108$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 100^0	$-0{,}0108$ „	„ „ $44{,}98^0$
120^0	$0{,}0072$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 120^0	$-0{,}0072$ „	„ „ $44{,}98^0$
140^0	$0{,}0048$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 140^0	$-0{,}0048$ „	„ „ $44{,}98^0$
160^0	$0{,}0024$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 160^0	$-0{,}0024$ „	„ „ $44{,}98^0$
180^0	$0{,}0000$ „	„ „ $44{,}98^0$	„ 180^0	$-0{,}0000$ „	„ „ $44{,}98^0$

und in Figur 6 graphisch aufgetragen. Längs der Abszisse variiert β_0, längs der Ordinate Δ (ausgezogene Kurve) und δ_0 (gestrichelte bezw. punktierte Kurve).

Der Periodizität gemäß müßte die △-Kurve eigentlich im Abstande + und — π nochmals gezeichnet werden (wenn man sich auf den Zwischenraum zwischen ± 2 π beschränkt). Um das zu vermeiden, ist den Zahlen der △-Achse einfach das ± π in Klammern hinzugefügt. — Die untere (gestrichelte) δ_0-Kurve bezieht sich dann auf die in der Figur gezeichnete, die obere (punktierte) auf die in Abständen ± π hinzugedachte △-Kurve.

Man bekommt eine anschauliche Vorstellung von der Wanderung des Verdopplungsstreifens, wenn man eine Parallele G zur Abszissenachse von unten nach oben oder umgekehrt über die Zeichnung streichen läßt und immer die Projektion P des Schnittpunktes mit der △-Kurve auf der Abszisse ins Auge faßt. Der Punkt P gibt direkt die Lage des Verdopplungsstreifens, und die entsprechende Ordinate der δ_0-Kurve das zugehörige δ_0 an.

Sehr deutlich erkennt man, daß sich der Verdopplungsstreifen in der Nähe von $\mathcal{M}$ ($\sin^2 \beta/2 = 1$) am schnellsten, in der Nähe der Hauptstreifen I und II am langsamsten bewegen muß (vgl. p. 51).

Da die △-Kurve unmittelbar vor den Hauptstreifen nochmals zur Abszisse umbiegt, so schneidet jede Parallele G diese Kurve in 2 Punkten. Das heißt, zu jeder Phasendifferenz △ gehören streng genommen 2 Lagen des Verdopplungsstreifens, P und P′. Indessen liegt P′ so nahe an den Hauptstreifen, daß es praktisch mit ihnen verschmilzt. Ein Blick auf die δ_0-Kurve lehrt übrigens, daß P′ bei einer ganz anderen Analysatorstellung auftritt, oder, besser gesagt, maximal sichtbar wird als P und schon deshalb bei der Beobachtung von P nicht stören kann.

Aus der Tabelle und Figur 6.) erkennt man auch, daß eine maximale Verdopplung nur etwa zwischen + π/4 und — π/4 existieren kann. Denn darüber hinaus schneidet die Parallele G die △-Kurve überhaupt nicht mehr. Die Grenzen dieses Gebiets der maximalen Verdopplung sind

rechnerisch ganz exakt zu ermitteln; denn sie werden durch die Umbiegungsstellen der $\triangle$-Kurve in der Nähe von I und II bestimmt. Dieselben wurden durch Differentiation des Ausdrucks 16.) nach β_0 zu:

$$\beta_0 = 2^0\,39', \; (360^0 - 2^0\,39'),$$
$$\triangle = 0{,}2584 \text{ bezw. } -0{,}2584$$

festgestellt. Praktisch sind diese Grenzen, welche natürlich von $\sigma_\perp$, $\sigma_{//}$ abhängen, nicht so scharf zu erkennen, weil der Verdopplungsstreifen auch dann noch, wenn die maximale Verdopplung schon aufgehört hat, zu sehen ist; er verblaßt ganz allmählich (vgl. p. 51).

Die große Empfindlichkeit bei der Einstellung des Verdopplungsstreifens zwischen die Spaltränder (vgl. p. 53) kann nicht mehr überraschen. Entspricht doch, wie aus der Tabelle und Figur 6.) zu entnehmen ist, einer Phasendifferenz $\pm$ 0,001 λ oder 0,002 π schon eine Verschiebung aus der Ruhelage um etwa 17° (in β_0), also um etwa den 10. Teil des Abstandes $\mathcal{M}$I oder $\mathcal{M}$II. Beträgt der Absand I, II 20 Winkelminuten (wie bei den Versuchen des § 4), so bedeutet das eine Verschiebung des Streifens um etwa eine Winkelminute, die eben noch wahrzunehmen ist.

Es liegt nahe, den Abstand I, II möglichst weit zu machen, um die absolute Verschiebung des Streifens zu vergrößern. Bei meiner Anordnung ließ sich das nicht ausführen, da die Luftschicht zwischen den Würfelprismen nur bei einer gewissen Dicke gut planparalell gemacht werden konnte. Aber selbst wenn man die Luftschicht noch dünner macht, so daß die Hauptstreifen noch weiter auseinander rücken, wird sich die Empfindlichkeit des Kriteriums kaum erhöhen lassen. Denn dadurch wird auch der Verdopplungsstreifen breiter und verwaschener, als er sonst schon ist. Sollte es allerdings gelingen, eine Anordnung zu finden, bei welcher der Verdopplungsstreifen an und für sich viel schärfer ist, etwa so scharf wie die Hauptstreifen, so wäre eine wesentliche Steigerung der Empfindlichkeit zu erwarten.

§ 6.

Anwendungen der Methode.

1. Messung einer beliebigen Phasendifferenz mit dem Kompensator.

Eine beliebige Phasendifferenz Δ wird gemessen, indem man den Verdopplungsstreifen durch Drehung der Kompensatortrommel zwischen die Ränder des Okularspaltes zurückführt und die Phasendifferenz direkt am Kompensator abliest.

Bei reflektierenden Flächen handelt es sich darum, das direkte Phänomen mit dem indirekten zu vergleichen. Hier erhebt sich eine Schwierigkeit: Hat man den Okularspalt am direkten Phänomen so eingestellt, daß er den Verdopplungsstreifen symmetrisch einfaßt, und dadurch eine bestimmte Lage zu den Hauptstreifen I und II einnimmt, so muß er genau dieselbe Lage den Hauptstreifen gegenüber auch im indirekten Phänomen erhalten, damit eine relative Verschiebung des Verdopplungsstreifens sichtbar wird. Das ist aber ohne weitere Hilfsmittel nicht zu erreichen, da man die Erscheinung beim Einbringen der reflektierenden Fläche zunächst ganz aus dem Auge verliert und erst durch Drehung des Fernrohres wieder aufsuchen muß. Man umgeht diese Schwierigkeit, wenn man statt des Okularspaltes den Kollimatorspalt benützt. Da der Kollimatorspalt, wie oben p. 32 erwähnt, das Gesichtsfeld rechts und links begrenzt, so kann man den Verdopplungsstreifen durch Verengern des Kollimatorspalts unter gleichzeitiger Drehung des Interferenzwürfels genau so einfassen, wie durch den Okularspalt. Jedoch behalten die Ränder des Kollimatorspaltes ihre Lage gegenüber den Hauptstreifen auch nach der Reflexion von selbst genau bei. Ein Nachteil ist allerdings, daß die Erscheinung infolge störender Reflexionen im Innern der Würfelprismen auch rechts und links von den Rändern

des Kollimatorspaltes noch ganz matt sichtbar bleibt[1]); indessen läßt sich dieses störende Licht durch den immer noch zur Verfügung stehenden Okularspalt abblenden.

Die Messung einer beliebigen Phasendifferenz an einer reflektierenden isotropen Fläche Fl. spielt sich demnach folgendermaßen ab: Man läßt die vom Würfel kommenden Strahlen zuerst direkt in den Analysator gelangen und bringt den Verdopplungsstreifen durch Drehen des Würfels und Verengern des Kollimatorspaltes symmetrisch zwischen die Spaltränder. Darauf wird der Kompensator eingeführt, justiert und an der Trommel so lange gedreht, bis der Verdopplungsstreifen wieder genau zwischen die Spaltränder fällt. Dies tritt ein bei $\Delta = 0$ und $\pm 2\pi$. Damit ist der Kompensator geeicht.

Sodann wird die Fläche Fl. auf den Spektrometertisch gebracht und so orientiert, daß sie mit der Achse des Spektrometers zusammenfällt. Das reflektierte Licht wird mit Kompensator, Analysator und Beobachtungsfernrohr F aufgefangen. Aus der Trommeldrehung, welche nötig ist, um den Verdopplungsstreifen zwischen die Spaltränder zurückzuführen, erhält man die Phasendifferenz Δ.

Um den Verdopplungsstreifen wieder auf größte Dunkelheit (max. Verdopplung) zu bringen, ist es im allgemeinen notwendig, den Analysator nachzudrehen. Aus dieser Drehung bestimmt sich das Reflexionsazimut, das Verhältnis $\varrho_{\perp}/\varrho_{\parallel}$ der Amplitudenänderungen, also die Drehung der Polarisationsebene genau so wie bei der gewöhnlichen Methode. Denn im § 2 ist eingehend erörtert worden, daß sich die Intensität des Verdopplungsstreifens in seiner Ruhelage ($\sin^2 \beta/2 = 1$) nur nach dem ersten an der Luftschicht des Würfels so gut wie total

---

[1]) Die Eigentümlichkeit der „Kurven gleicher Neigung" ist eben, daß unabhängig von jeder Begrenzung des Strahlenganges durch Linsen und dergl. und unabhängig von jeder beugenden Wirkung ein geordnetes Phänomen zustande kommt, wenn nur Strahlen aller möglichen Richtungen auf die planparallele Platte treffen.

reflektierten Strahle richtet. Maximale Verdopplung ist gleichbedeutend mit Auslöschung dieses Strahles.

Bei der neuen Methode bestehen also für Phasendifferenzen einerseits und Amplitudenänderungen andrerseits zwei vollständig getrennte Kriterien; für die ersteren die Wanderung, für die letzteren die Aufhellung des Verdopplungsstreifens. Dieser Umstand ermöglicht es, auch ohne Kompensator auf den ersten Blick festzustellen, ob man es mit kleinen Phasendifferenzen oder Amplitudenänderungen oder mit beiden zugleich zu tun hat.

Bei der gewöhnlichen Methode macht sich beides durch Aufhellung des Gesichtsfeldes zwischen gekreuzten Nicols bemerkbar. Man kann daher ohne Kompensator, zumal wenn die Nicols nicht vollkommen auslöschen, nie mit Sicherheit auf Amplitudenänderungen oder Phasendifferenzen schließen.

Ein weiterer Umstand, welcher die neue Methode, abgesehen von ihrer größeren Empfindlichkeit kennzeichnet, ist die leichte Unterscheidung positiver und negativer Elliptizitäten, je nachdem sich der Verdopplungsstreifen in der einen oder anderen Richtung verschiebt. Dabei braucht man den Kompensator nicht, ist also auch unabhängig von jeder fehlerhaften Bestimmung des Nullpunktes.

Die große Empfindlichkeit der Einstellung und die leichte Unterscheidung positiver und negativer Elliptizitäten teilt die neue Methode mit den Halbschattenapparaten vom Bravais'schen Typus[1]). In der gleichzeitigen Bestimmung des Reflexionsazimuts (Azimuts der wiederhergestellten linearen Polarisation), welche bei diesen Apparaten gar nicht oder nur indirekt möglich ist, scheint sie ihnen überlegen.

---

[1]) A. Bravais; Pogg. Ann. **96.** 395. 1855. Neuerdings hat R. Zakrzewski einen elliptischen Halbschattenanalysator angegeben, über dessen praktische Empfindlichkeit von Herrn M. Volke im hiesigen Institut Untersuchungen angestellt wurden. (M. Volke, Inaugural-Dissertation. Breslau 1909.)

2. Anwendung zur Erkennung geringer Doppelbrechung.

Schickt man einen homogenen, linear polarisierten Lichtstrahl durch einen doppeltbrechenden Krystall, so treten zwei senkrecht zueinander polarisierte Komponenten aus, welche einen bestimmten Gangunterschied besitzen. Ist die Doppelbrechung sehr schwach, so pflanzen sich die beiden Komponenten nahezu in derselben Richtung fort und die Anisotropie ist schließlich nur noch an dem erwähnten Gangunterschied zu erkennen. Insofern die neue Methode geeignet ist, noch sehr geringe Phasendifferenzen zweier senkrecht zueinander polarisierter Komponenten sichtbar zu machen, ist sie also berufen, zur Erkennung schwacher Doppelbrechungen zu dienen. Schwach doppelt brechend sind z. B. Gläser, welche ungleichmäßig gekühlt oder unregelmäßigem Druck oder Zug ausgesetzt wurden. In der Tat riefen die meisten gewöhnlichen Glasplatten, wenn sie zwischen Würfel und Kompensator gehalten wurden, ein „Wandern“ des Verdopplungsstreifens hervor. Ein vorzüglicher, im hiesigen Institut befindlicher planparalleler Glasstreifen zeigte diesen Fehler nicht. Dagegen genügte schon eine geringe Erwärmung mit der Hand oben und unten an der Durchtrittsstelle des Lichtes, um die Verschiebung des Streifens zu bewirken. Bringt man den Glasstreifen z. B. in horizontaler Lage ein und erwärmt, so verschiebt sich der Verdopplungsstreifen auf I zu, also im Sinne positiver Phasendifferenzen; er wandert dagegen nach II, also im Sinne negativer Phasendifferenzen, wenn man den Glasstreifen in vertikaler Lage einbringt.

Demnach verhält sich die Glasplatte im Zustande der Erwärmung etwa wie ein einachsiger, doppelt brechender Krystall, dessen Achse in eine der Hauptrichtungen der Platte fällt, und es ist leicht, den Grad der Doppelbrechung (die Differenz der Hauptbrechungsquotienten) anzugeben, welche auf diese Weise gerade noch sichtbar

wird. Bei der Dicke d der Glasplatte und der Wellenlänge λ des benützten Lichtes beträgt der Gangunterschied:

$$\frac{d}{2}(n_1 - n_2).$$

Setzt man dies gleich $^1/_{1000}$, λ gleich 0,546 μμ und nimmt d zu 0,5 cm an, so ergibt sich:

$$n_1 - n_2 = 1{,}1 \cdot 10^{-6},$$

also etwa eine Einheit der 6. Dezimale.

Auch bei der Prüfung solcher Glasplatten auf Doppelbrechung muß man, um unabhängig von etwaiger prismatischer Wirkung der Platte zu sein, den Kollimatorspalt statt des Okularspaltes benützen; sonst ist man leicht Täuschungen ausgesetzt. Denn es ist ohne weiteres klar, daß bei einer Ablenkung der Hauptstreifen auch der Verdopplungsstreifen sich den Rändern des Okularspalts gegenüber verschieben muß, ohne daß er seine Lage gegenüber den Hauptstreifen zu ändern braucht. Bei Benützung des Kollimatorspaltes kann die prismatische Wirkung allein keine relative Verschiebung des Streifens gegenüber den Spalträndern bewirken, weil dieselben gleichzeitig mit dem Hauptstreifen abgelenkt werden.

Anisotropie des Mediums macht sich also stets durch eine Verschiebung oder Verzerrung des Verdopplungsstreifens innerhalb der Ränder des Kollimatorspaltes geltend, während eine Verzerrung der Spalträndern selbst auf variablen Brechungsquotienten innerhalb der Substanz, also auf Inhomogenität, schließen läßt.

Auf dieselbe Weise kann man jedes beliebige Prisma in der Durchsicht untersuchen. Man vergleicht wie bei der reflektierenden Fläche das direkte mit dem „gebrochenen" Phänomen, wieder mit Hilfe des Kollimatorspaltes. Zeigen sich Phasendifferenzen, so können dieselben nur von Spannungen im Innern des Prismas herrühren. Die Größe der Elliptizität mißt gleichzeitig die Größe der Spannung.

Damit nicht schon durch die Neigungsänderung der Strahlen bei der Brechung eine relative Verschiebung des

Verdopplungsstreifens eintreten kann, muß man unter dem Minimum der Ablenkung beobachten. Man ist dann sicher, daß drei Strahlen von geringer Neigungsdifferenz, entsprechend den Rändern des Kollimatorspaltes und der Mitte des dazwischen befindlichen Verdopplungsstreifens, welche vor dem Eintritt in das Prisma gleichen Winkelabstand besitzen, auch nach der Brechung gleiche Winkel einschließen.

Nach dieser Methode wurden eine Reihe von Glasprismen untersucht. Es zeigten sich die wenigsten spannungsfrei, und eigentlich nur ein einziges vollkommen spannungslos. Inzwischen hat Herr M. Volke[1]) dieselben Prismen im Gebiet der Totalreflexion auf die Elliptizität des reflektierten Lichtes hin untersucht. Er fand, daß zugleich mit der Spannung der Prismen auch die Abweichung von dem theoretischen (Fresnel'schen) Verlauf der Elliptizitätskurve zunahm, und daß das eine spannungslose Prisma ($n = 1{,}5196$) sich dem theoretischen Verlauf sehr gut anschloß.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass man bei diesen Messungen auch den Analysator zuerst nachdrehen muß, um nach der Brechung wieder maximale Verdopplung zu erhalten, da ja hier ebenso wie bei der Reflexion die senkrecht und parallel polarisierten Komponenten gewisse Amplitudenänderungen $\rho_\perp$ und $\rho_\parallel$ erfahren.

---

[1]) M. Volke, Inaug.-Dissert., Breslau 1909 (p. 23.)

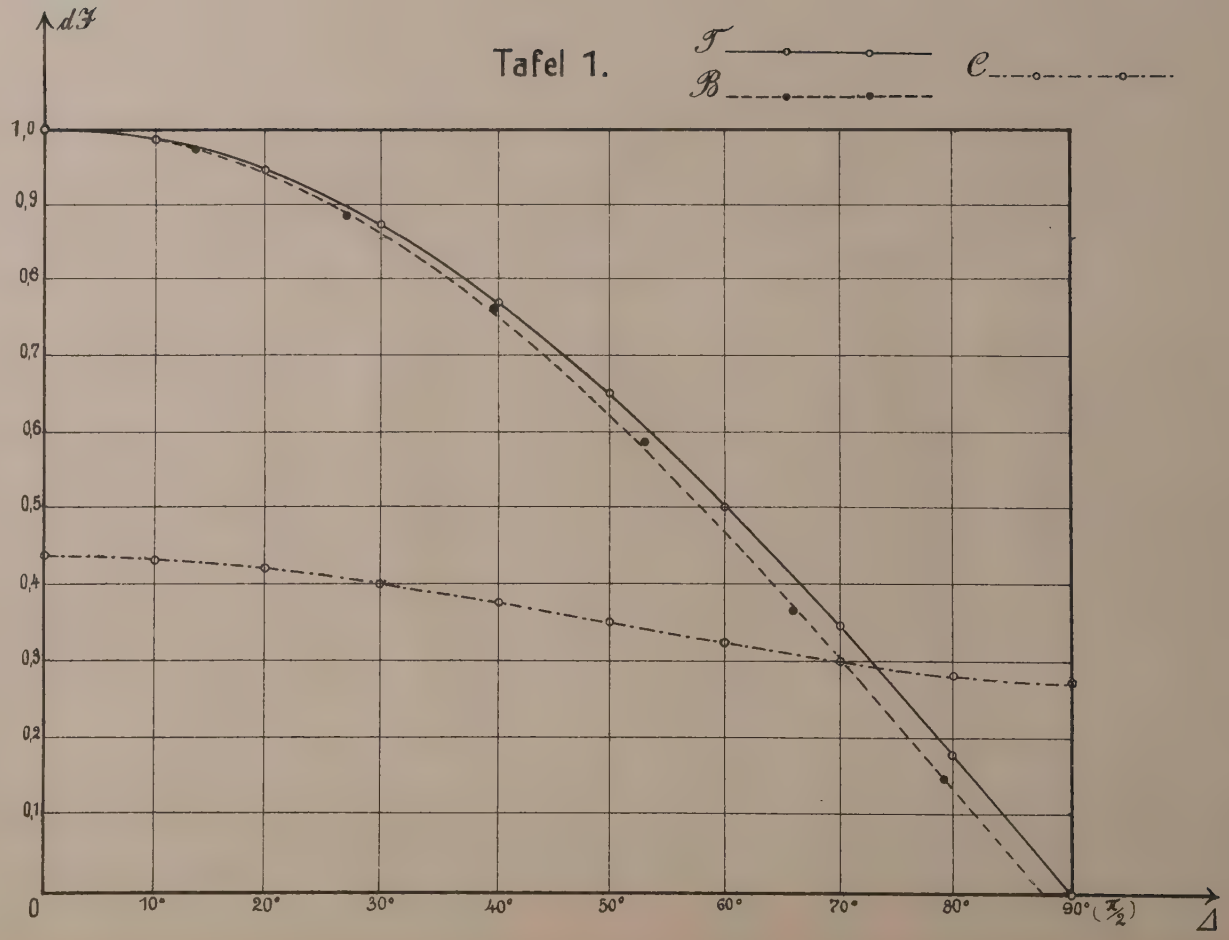
Zusammenfassung der Resultate.

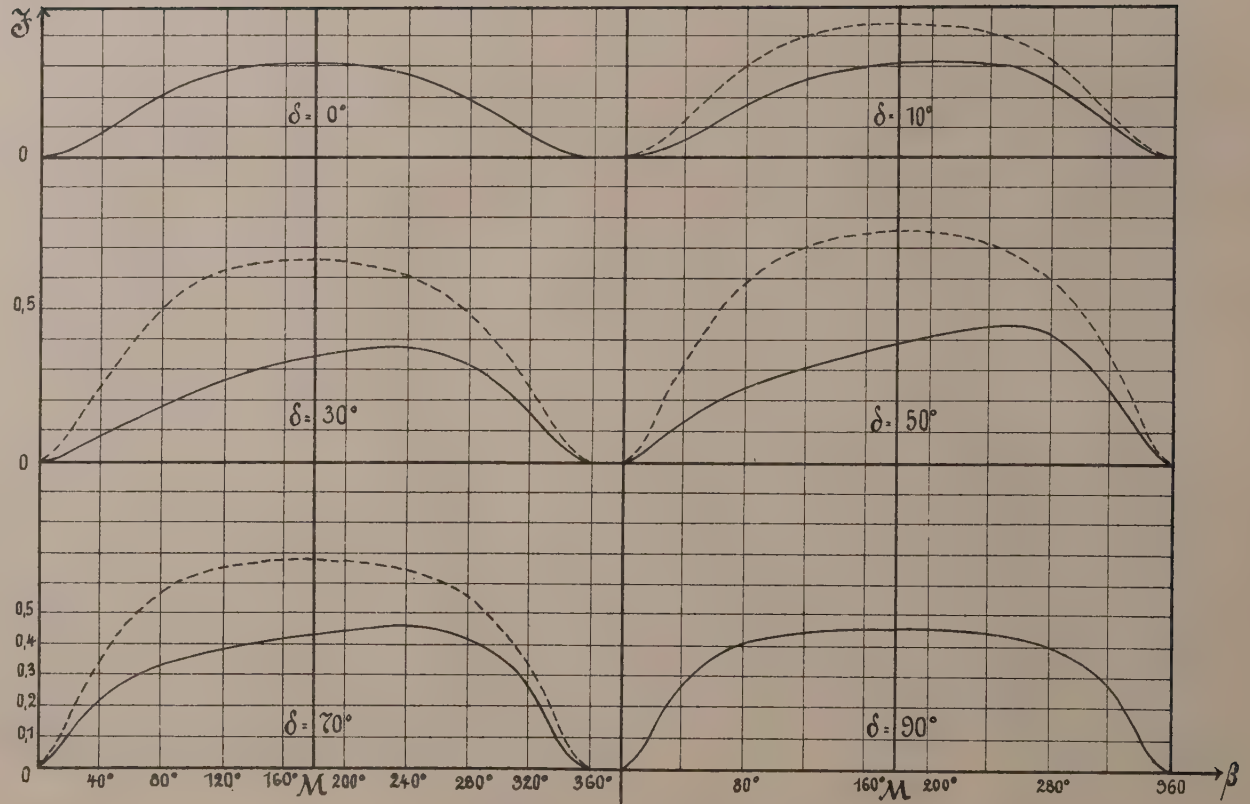
1. Die Lummer'schen Doppelringe bei elliptisch polarisiertem Lichte unterscheiden sich von der entsprechenden Erscheinung bei linear polarisiertem und natürlichem unpolarisierten Lichte durch die unsymmetrische Intensitätsverteilung zwischen zwei Hauptstreifen.

2. Mit der Unsymmetrie steht im Zusammenhang, daß der Verdopplungsstreifen bei elliptisch polarisiertem Lichte gegenüber der Lage, die er bei linear polarisiertem Lichte einnimmt, verschoben ist. Oberhalb einer gewissen Phasendifferenz $\triangle$ der beiden Hauptkomponenten bleibt die Verdopplung ganz aus.

3. Allen drei genannten Arten des Lichts ist folgendes gemeinsam: In unmittelbarer Nähe der Grenze der Totalreflexion existiert zwischen 2 Hauptstreifen (Herschelschen Streifen) eine Stelle $\sin^2\beta/2 = 1$ (die Ruhelage des Verdopplungsstreifens bei $\triangle = 0$), deren Intensität praktisch nur durch den ersten Strahl s_1 des reflektierten Strahlenkomplexes bestimmt wird. Diese Tatsache ermöglicht es, wenn man das Phänomen an einer ebenen Fläche reflektieren läßt, das Azimut der wiederhergestellten linearen Polarisation und damit das Verhältnis der Reflexionskoeffizienten (Amplitudenänderungen) $\varrho_\perp/\varrho_\parallel$ unmittelbar aus der Analysatorstellung bei „maximaler Verdopplung" zu berechnen.

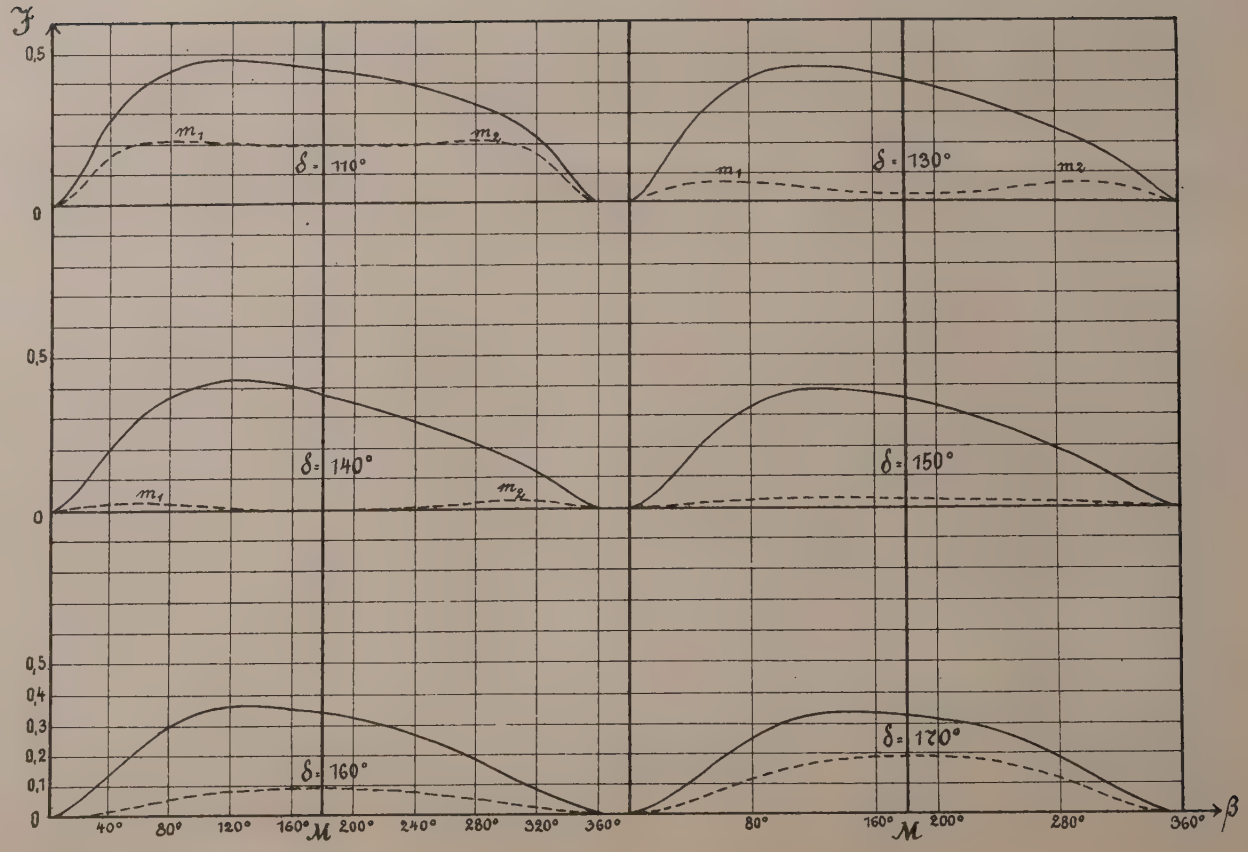
4. Die „Wanderung" des Verdopplungsstreifens liefert ein empfindliches Kriterium zur Wahrnehmung kleinster Phasendifferenzen, welches bei der Messung einer beliebigen Phasendifferenz mit dem Kompensator und besonders zur Feststellung geringster Doppelbrechungen benützt werden kann.


Tafel 1.
$\mathcal{T}$
$\mathcal{B}$
$\mathcal{C}$
$d\mathcal{T}$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
10°
20°
30°
40°
50°
60°
70°
80°
90° ($\frac{\pi}{2}$)
Δ

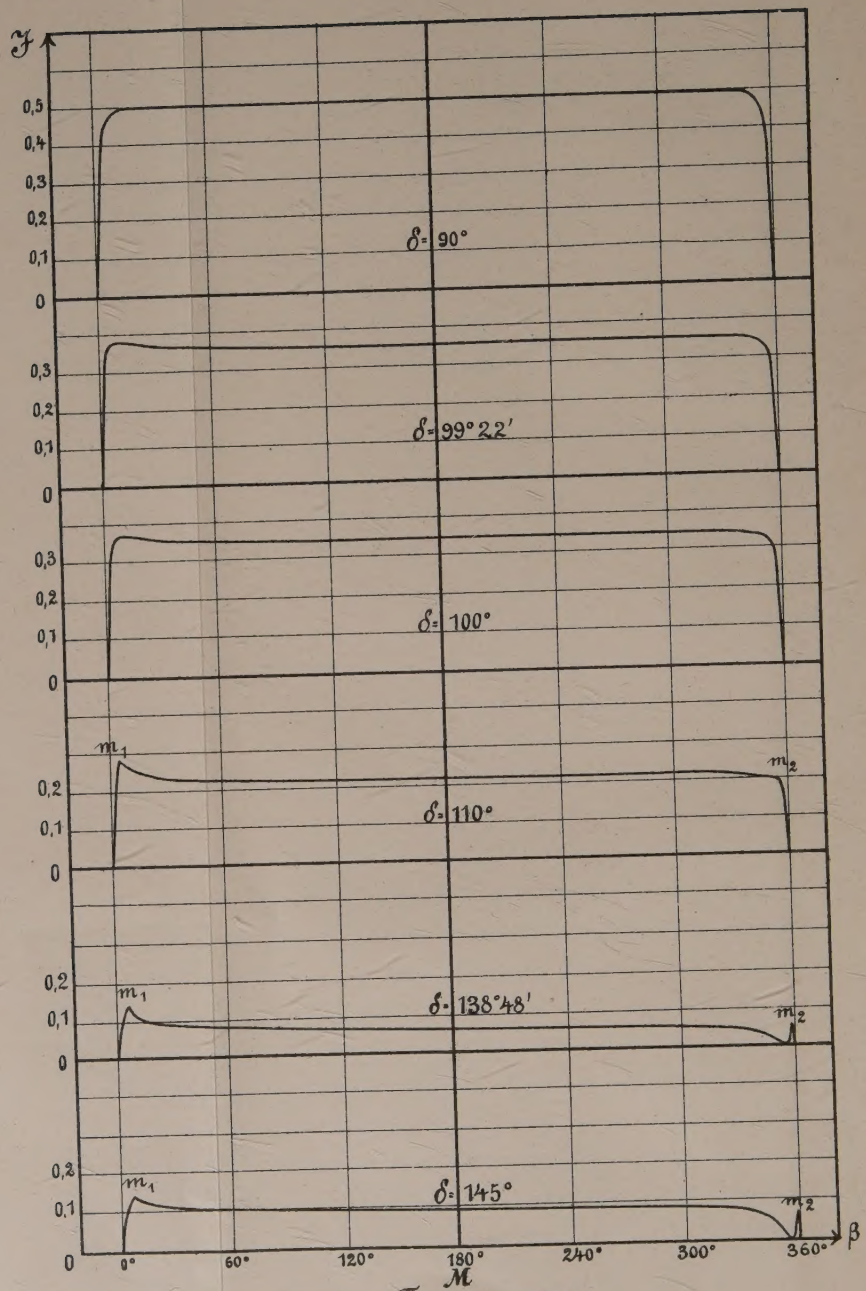


Tafel 2.

$\Delta = -\frac{\pi}{2}$ $(\Delta = 0)$; $r = 80°$



Tafel 3. (Fortsetzung zu Tafel 2.)



Tafel 4.

$\Delta = -\frac{\pi}{6}$; $r = 89°30'$

Lebenslauf.

Zu Breslau wurde ich, Kurt Sorge, ev. Konfession, als Sohn des Kaufmanns Adolf Sorge am 3. Juli 1887 geboren.

Ostern 1905 erhielt ich das Zeugnis der Reife am städt. Gymnasium zu Maria Magdalena in Breslau.

Darauf wurde ich bei der philosophischen Fakultät der Universität Breslau immatrikuliert.

Ich habe die Vorlesungen und Übungen* der folgenden Herren Dozenten besucht:

Abegg, Baumgartner, Franz, Hintze*, Kneser*, Kühnemann, Kükenthal*, Landsberg*, Lummer*, Pax, Pringsheim*, Riesenfeld, Rohde, Rosanes, Cl. Schäfer, Wätzmann, Zimmer*.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern spreche ich meinen tiefgefühlten Dank aus, insbesondere den Herren Professoren O. Lummer und E. Pringsheim für das fördernde Interesse, welches sie meiner Arbeit entgegenbrachten, und ersterem für die Anregung zu dieser Arbeit.